

Matematinis samprotavimas
mokantis matematikos kolegijoje

Konferencija: Matematika aukštajame moksle – iššūkis ir galimybė

Rimas Norvaiša (VU Matematinio švietimo centras)

Šiauliai, 2022 rugsėjo 19 d

Matematinis samprotavimas kolegijos matematikoje

- *Antanas Augaitis* (Kauno technikos kolegija). Matematinio samprotavimo svarba mokant(is) matematiką bendrojo lavinimo mokykloje ir kolegijoje. Inžinerinės ir edukacinės technologijos, Kaunas, 2019, 129-134.
- Straipsnyje rašoma apie matematinių sąvokų apibrėžimų tikslumo svarbą.
- Tai tik vienas, nors ir labai svarbus, matematinio samprotavimo aspektas.

Kas yra matematinis samprotavimas (MS)?

- Mokyklinės ir koleginės matematikos turinio kontekste *matematinis samprotavimas* (MS) yra dėsningumų paieška, spėjimų formulavimas, spėjimų bendrinimas ir spėjimų pagrindimas arba paneigimas.
- Pavyzdys iš pradinio ugdymo. Galima siūlyti kolegijos studentams.
- Tema – lyginiai ir nelyginiai skaičiai.
- Užduotis. Sudedame du nelyginius skaičius. Ką galima pasakyti apie jų sumą? Atsakymą pagrįsti.

Lyginiai ir nelyginiai skaičiai

Skaičius yra nelyginis, jei, grupuojant po du visus nedidesnius už jį, vienas lieka laisvas.

Pavyzdžiui, skaičius 13 nelyginis, nes

1	3	11	13
2	4	12	

Skaičius yra lyginis, jei, grupuojant po du visus nedidesnius už jį, laisvų nelieka.

Pavyzdžiui, skaičius 16 lyginis, nes

1	3	13	15
2	4	14	16

Teiginys. Dviejų nelyginių skaičių suma yra lyginis skaičius.

Įrodymas.



Sąvokos apibrėžtis

- Apibrėžtis. Sveikasis skaičius vadinamas *lyginiu*, jei jis dalosi iš dviejų. Priešingu atveju, kai nesidalo iš dviejų, sveikasis skaičius vadinamas *nelyginiu*.
- Ši apibrėžtis grindžiama sveikųjų skaičių *dalybos su liekana* faktu.
- Teorema. Tarkime, kad m ir n yra sveikųjų skaičių pora, be to, n yra teigiamas. Egzistuoja tokia vienintelė sveikųjų skaičių pora u ir v , kad
 - $m = un + v$ ir $0 \leq v < n$.
- Moralas: apibrėžtis įgalina arba ne vienokį ar kitokį įrodymą.

Kam reikalingas MS?

- MS yra matematikos mokymo būdas.
- MS yra temos pateikimo būdas išskiriant joje esmines sąvokas ir jų tarpusavio sąryšius.
- MS kuria prasmę.
- Prasmė yra toks žinių (sąvokų, situacijų, konteksto) supratimas, kuris sieja naujas žinias su jau turimomis žiniomis.
- Metafora

Samprotavimas apie skaičius ir matavimo rezultatus

- *Atsakymo ir matavimo rezultatų pagrįstumas.*
- Pagrįstas (deramas, tinkamas) atsakymo ir matavimo rezultatų pateikimas.
- Sprendimas (įvertinimas) ar atsakyme ir matavimu gautas dydis turi tinkamą eilę, ar jis išreikštas tinkamais vienetais.
- Užduotis. Įvertinti viso žemės paviršiaus plotą.

Veikla klasėje

- Dėstytojas. Spėkite. Kokia galėtų būti viso žemės paviršiaus ploto reikšmė?
- 1 studentas. Neįsivaizduoju. Gal milijoną, o gal milijardą kvadratinų kilometrų.
- 2 studentas. Turime rutulį, kuri iš esmės yra sfera. Tad, jei žinotume spindulį, galėtume apskaičiuoti.
- Dėstytojas. Gerai, padėsiu. Pasakysiu, kad radiusas yra
- studentai skaičiuodami gauna kelias reikšmes
- Dėstytojas. Koks įvertinimas jūsų nuomone geriausias?
- vyksta diskusija

Samprotavimas apie skaičius ir matavimo rezultatus

- Užduoties sprendimas parodo atsakymo pagrindimo svarbą ir atsakymo tikslumo prasmingumą.
- *Aproksimavimas ir paklaida*
- Suvokimas, kad realaus pasaulio dydžių matavimo rezultatais yra aproksimacijos ir per daug tikslios reikšmės neturėtų būti naudojamos realaus pasaulio situacijose.
- Paklaidos reikšmės supratimas ir pripažinimas atliekant skaičiavimus su matavimo rezultatais.
- Skaičiaus jausmas. Pirmieji skaitmenys nusako didumą.
- Pagrindas – *pozicinė skaičiavimo sistema*

Veikla klasėje

- Užduotis. Žinodami, kad π yra iracionalus skaičius, dažnai naudojame aproksimacijas 3.14 ir $22/7$. Kokią darome paklaidą naudodami šias aproksimacijas? Raskite *santykinės paklaidos* viršutinį režį ir iliustruokite atsakymą pavyzdžiais.
- Užduoties tikslas – suprasti, kad paklaida nėra klaida.

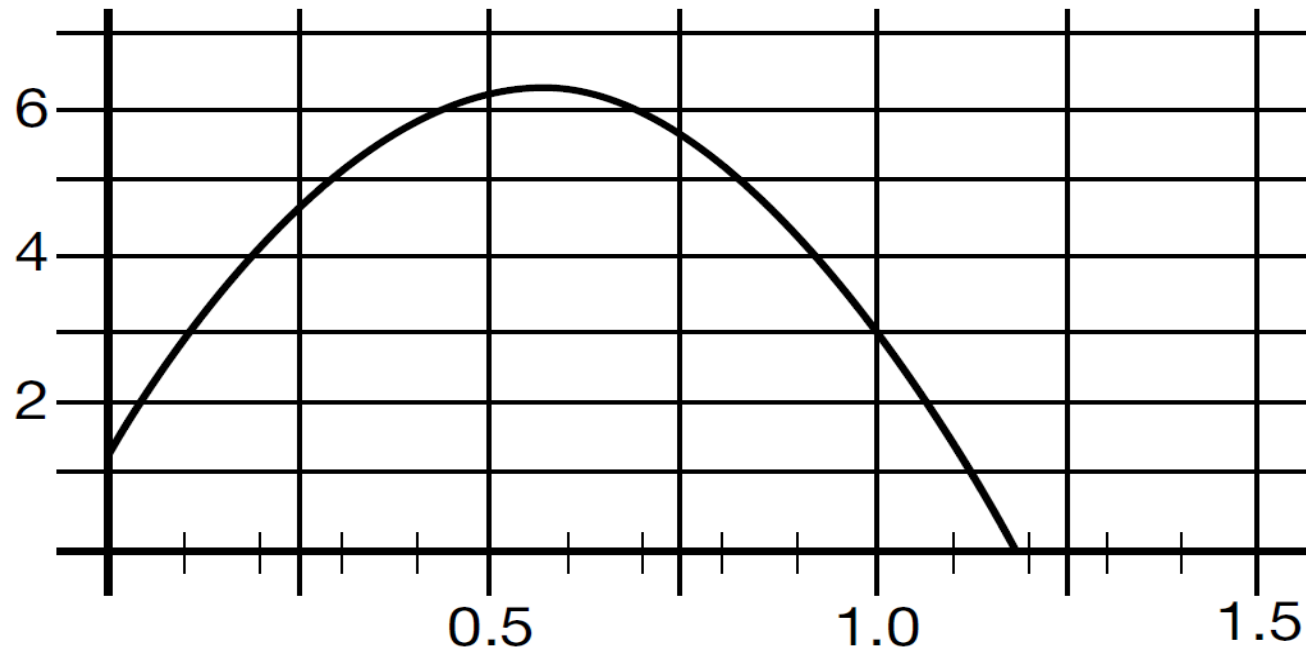
Paklaidos vertinimas yra prasminga veikla, siejanti anksčiau girdėtas sąvokas ir savybes (pozicinė skaičiavimo sistema).

Samprotavimas su algebriniais simboliais

- *Prasmingas simbolių naudojimas*. Kintamųjų pasirinkimas nurodant jo reikšmę bei reiškinių ir lygčių sudarymas duotame kontekste.
- Kas yra „kintamasis“?
- Kintamųjų naudojimo atvejai:
 1. Nežinomas lygtyje (tokiu atveju geriau pamiršti „kintamasis“)
 2. Vietos rezervavimas (pvz $a + b = b + a$ visiems a ir b)
 3. Parametras (pvz $y = mx + b$)

Veikla klasėje

- Algebriniu reiškiniu užrašomas mestos pasagos aukštis priklausomai nuo praėjusio laiko: $1\frac{3}{16} + 18t - 16t^2$



Veikla klasėje (tęsinys)

- Kuris iš šių keturių ekvivalenčių reiškinių naudingiausias randant maksimalų pasagos aukštį? Kodėl?

$$(a) \ 1\frac{3}{16} + 18t - 16t^2$$

$$(b) \ -16\left(t - \frac{19}{16}\right)\left(t + \frac{1}{16}\right)$$

$$(c) \ \frac{1}{16}(19 - 16t)(16t + 1)$$

$$(d) \ -16\left(t - \frac{9}{16}\right)^2 + \frac{100}{16}$$

Samprotavimas su algebriniais simboliais

- *Rūpestingas pertvarkymas.* Pertvarkymų siejimas su aritmetikos dėsniais. Pertvarkymų rezultatų numatymas. Tikslingas procedūrų pasirinkimas duotame kontekste. Skaičiavimų įsivaizdavimas galvoje.
- *Sprendimas samprotaujant.* Sprendimo žingsnių matymas kaip loginio išvedimo taikymas lygybei. Sprendimo interpretavimas duotame kontekste.
- *Algebros siejimas su geometrija.* Geometrinių situacijų reiškimas naudojant algebrą ir atvirkščiai. Ryšio tarp geometrijos ir algebros naudojimas sprendžiant užduotis.
- *Reiškinų ir funkcijų siejimas.* Įvairių algebrinių reprezentacijų naudojimas siekiant suprasti funkcijos savybes. Darbas su funkcijos simboliu.

Ko reikia matematiniam samprotavimui?

1. Kiekviena sąvoka yra tiksliai apibrežiama, o sąvokų apibrežimai yra loginių išvedimu pagrindas;
2. Kiekvienas teiginys yra tiksliai suformuluotas, visada aišku, kas yra žinoma ir kas nėra žinoma;
3. Kiekvienas teisingas teiginys gali būti pagrindžiamas logiškai taisyklingu samprotavimu;
4. Matematika yra koherentiška: tai audinys, kurį sudaro sąvokos ir gebėjimai, logiškai suausti į vieną visumą;
5. Matematikos žinios yra kuriamos tikslingai, todėl kiekviena standartinėje mokymo programoje pateikiama sąvoka ar gebėjimas turi savo konkrečią paskirtį.

Ko reikia matematiniam samprotavimui?

- Būtina suderinti:
- Samprotavimui tinkamą matematikos turinį (programą)
- Tinkamas dėstytojo pedagogines turinio žinias (kvalifikacija)
- Studento žinių vertinimas (formuojamasis)

Vertinimo pavyzdys

1. Ribotas santykinės paklaidos supratimas.
2. Turi tam tikrą santykinės paklaidos supratimą, bet negeba įvertinti paklaidos viršutinį rėžį.
3. Naudoja santykinę paklaidą įvertindamas jos viršutinį rėžį, bet pagrindime yra viena ar daugiau klaidų, arba pagrindimas nesusijęs su nagrinėjamu pavyzdžiu.
4. Naudoja santykinę paklaidą įvertindamas jos viršutinį rėžį pagrįsdamas samprotavimą be žymesnių klaidų. Pateikia pavyzdžių iliustruojančių pagrindimą.

Matematika kaip mąstymo būdas

- Dabartinė mokyklinė matematika, o tuo pačiu ir kolegijų matematika, orientuota į faktų ir procedūrų mokymąsi ir jų taikymą atliekant standartines užduotis. Trumpai, *tikslas - rasti teisingą atsakymą.*
- Matematinio samprotavimo grindžiama matematika atskleidžia matematinio mąstymo specifiką. Trumpai, *tikslas – pagrįsti atsakymą.*
- Jau keli dešimtmečiai daugelis pasaulio šalių savo švietimo sistemas orientuoja į matematiką kaip mąstymo būdą.

Ačiū už dėmesį

- Pristatymas yra mano svetainėje www.norvaisa.lt