VILNIAUS UNIVERSITETAS  
FILOSOFIJOS FAKULTETAS

Teofilius Virbickas  
Filosofijos bakalauro studijų programa

GEOMETRIJOS ARITMETIZACIJA: RENĖ DEKARTO ANALITINĖS GEOMETRIJOS IR ISTORINIŲ APLINKYBIŲ APŽVALGA

Mokslinis esė

Vilnius, 2016

# TURINYS

[TURINYS 2](#_Toc453509751)

[ĮVADAS 3](#_Toc453509752)

[1 DALIS: SĄSAJOS SU PERIMTA TRADICIJA 3](#_Toc453509753)

[Dekarto susistemintos ankstesnės minties apraiškos 3](#_Toc453509754)

[Bandymas suderinti skaičius ir dydžius 5](#_Toc453509755)

[II SKYRIUS: GEOMETRIJOS ARITMETIZACIJOS PLĖTRA 8](#_Toc453509756)

[Dekarto „judesio“ reikšmė tolimesniam matematikų darbui 8](#_Toc453509757)

[IŠVADOS 11](#_Toc453509758)

[BIBLIOGRAFIJA 13](#_Toc453509759)

# ĮVADAS

Šiuomoksliniu esė bandoma atskleisti problematišką geometrijos ir aritmetikos derinimo istoriją. Išskirtinis dėmesys teikiamas Dekarto analitinės geometrijos principams, kurių dekonstravimas leis pažvelgti į tuo metu vyravusius įsitikinimus matematikoje. Siekiama atskleisti ryšius tarp Dekarto, kaip pagrindinio esė objekto, minčių ir ankstesnės tradicijos bei jo laikmečio akademikų. Taip pat bus atsižvelgta ir į Dekarto idėjas plėtojusio Valiso ir kitų podekartinių matematikų vaidmenį. Darbe prioritetas teikiamas Dekarto istorinio bandymo reikšmei vertinti. Remiamasi Stillwello įvadu į matematiką „Mathematics and Its History“ bei Tenesio universiteto profesoriaus Mclenano išsamia ir internete laisvai prieinama dalomąja medžiaga, skirta susipažinti su geometrijos aritmetizacijos istorija. Darbu siekiama ne profesionaliai supažindinti su matematikos istorija, bet atskleisti dar vieną, filosofijoje esminį perėjimą atlikusio Renė Dekarto minties sklaidos sritį, bei pažvelgti kokią reakciją katalizavimo toks jo bandymas, o kartu, įvertinti, kokių minties prielaidų rezultatas galėjo būti tokia jo mąstymo apraiška.

# 1 DALIS: SĄSAJOS SU PERIMTA TRADICIJA

## Dekarto susistemintos ankstesnės minties apraiškos

Problema susijusi su požiūriu, jog geometrija gali būti išreikšta skaičiais ar algebra, su kuriuo susidūrė ankstyvieji geometrai analitikai, tokie kaip Dekartas (pranc. René Descartes). Dekartas sistemiškai bandė suderinti skaičius ir dydžius, tačiau jo minčių užuomazgos diskutuotinos. Dauguma Dekarto vystytų minčių nebuvo naujos. Kaip keletą tokių pavyzdžių, nurodančių ryšį su scholastiškąja tradicija, kuri XVII amžiuje vis dar buvo vyraujantis minties pagrindas, galima išskirti Šv. Augustiną, kartu su Tomu Akviniečiu krikščionybei pritaikiusį antikos filosofų mintis, panašiai kaip Dekartas formulavusį savąjį dualizmą: jis pripažino klysti galinčias jusles ir nuo jų nepriklausomas bei pajėgias informaciją apie išorinį pasaulį generuoti mintis (Tatarkiewicz, 2001, p. 220). „Savo mintis yra pats tikriausias faktas“ buvo Augustino dekartiškasis „cogito ergo sum“ (ibid, p. 221). Savo ruožtu Šv. Bonaventūras (ita. – Giovanni Fidanza) iki Dekarto kalbėjo apie įgimtinius proto gebėjimus pažinti tiesą – amžinas ir nekintančias tiesas, kurių šviesoje pažintinos tampa ir laikinosios. Panašiai kaip Bonaventūras, Dekartas laiko Dievą veiksniu, įgalinančiu pažinimą (ibid, p. 302). Panašiai ir savo veikale „Dioptrika“, Dekartas plėtojo optikos principus, kurie jau buvo atrasti Ptolemėjaus, Keplerio, Snelo ir kt. Ryšį tarp algebros ir geometrijos dar iki Dekarto įvertino arabų matematikai, tokie kaip Omaras Khajamas (arab. Omar Khayyam). Grafiškai vaizduojamos kreivės jau buvo kartografijoje ir astronomijoje. Grafinį judėjimo lygčių vaizdavimą, 1346 metais tyrinėtą Džiovanio di Kasalio (ita. Giovanni di Casali), ištobulino Nikolas Oresme (pranc. Nicole Oresme) ir galiausiai perėmė Galilėjus (ita. Galileo Galilei). Vis dėlto, Dekartas buvo pirmasis tokiu mąstu susisteminęs minėtuosius filosofinius principus, o jo optikos principų išdėstymo aiškumas ir nuoseklumas pastumėjo teorijos ir optikos instrumentuotės plėtrą (Stillwell, 2010, p. 124).

Dekarto „Geometrijoje“ (pranc. „[La Géométrie](https://en.wikipedia.org/wiki/La_G%C3%A9om%C3%A9trie)”), parašytoje kaip „Samprotavimų apie metodą“ priedas, nėra aptinkamas analitinės geometrijos paaiškinimas. „Geometrijoje” didelis dėmesys buvo skiriamas dvejoms pereinamosios XVI amžiaus temoms – lygčių teorijai ir beveik pamirštai “lygčių konstrukcijos” teorijai. Lygties kontrukcijai naudota paradigma buvo IV a. pr. Kr . graikų matematiko Manaechmo konstrukcija, naudojant parabolę ir hiperbolę (ibid, p. 118). Dera pažymėti Manaechmo indėlį matematikoje: jis nustatė kūgio pjūvius iš elipsės, parabolės ir hiperbolės sudaryta plokštuma. Siekdamas padvigubinti kubą sprendžiant vidurkių proporcijų uždavinį, jis jį padvigubino panaudodamas minėtuoju būdu nustatytus kūgio pjūvius.

Dekartas, 1619 (1620) metais atrado metodą spręsti bet kokią trečiojo arba ketvirtojo laipsnio lygtį susikertant antrojo laispnio kreivėms, parabolei ir apskritimui. Pažymėtinas Dekarto ir prancūzų matematiko Pjero de Ferma ryšys (pranc. Pierre de Fermat). Dekarto draugo Bekmano (angl. – Isaac Beeckman) teigimu, entuziastingas dėl savo atradimo, Dekartas 1628 m. klaidingai pripažino, kad tiek jam pačiam, tiek niekam kitam nėra pavykę atrasti ko nors geriau (ibid, p. 118). Vis tik tą patį atradimą nepaskelbtame darbe atliko ir Ferma 1629 metais, tačiau priešingai nei Dekartas, toliau minties nevystė. Dėl minties autorystės pirmumo ginčytąsi dėl šios priežasties: koordinačių geometrijos idėją Dekartas pateikė laiške Beckmanui 1619 metais, bet jo „Samprotavimai apie metodą“ (ir jo priedas „Geometrija“) buvo išleistas tik 1637 metais, tuo tarpu Ferma darbas, parašytas 1629 metais, išleistas buvo tik po jo mirties, 1679 metais, nors viešumoje ir cirkuliavo darbo rankraštis. Nors ir sukritikuotas Ferma, Paskalio (pranc. Blaise Pascale), Dekartui vis tik priskiriamas metodas tapo svarbiu mokslo įrankiu (Mclennan, 2009, p. 153).

## Bandymas suderinti skaičius ir dydžius

Dekartas „Geometrijoje“ teigė, kad bet kokia problema geometrijoje gali būti redukuota į tokius teiginius, kur žinomi konkrečių tiesių ilgiai yra pakankami jų sudarymui. Tam, anot jo, reikalingos tik keturios-penkios aritmetinės operacijos: sudėtis, atimtis, daugyba, dalyba ir kvadratinės šaknies traukimas. Realieji skaičiai *per se* dar nebuvo atrasti, todėl pats Dekartas, priešingai nei mes, nevertino analitinės geometrijos kaip geometrinių kreivių redukcijos į lygtis su realiaisiais skaičiais. Tai susiję su laiko, kuomet Dekartas vystė savo geometriją, žiniomis: nesuderinami skirtumai tarp racionaliųjų ir iracionaliųjų skaičių vedė prie skirties tarp skaičiaus (arithmos) ir dydžio (megethos), taip pat, prie nepriklausomos aritmetikos aksiomatizacijos, diskrečiųjų kiekių (quantity) mokslo ir geometrijos kaip besitęsiančių kiekių mokslo (ibid, p. 153). Euklido dydžių teorija įgalino operavimą dydžiais naudojant sudėtį, atimtį, daugybą ar dalybą, tol, kol dydžiai tos pačios ryšies: ilgiai galėjo būti pridėti prie ilgių, laikai prie laikų, bet ne ilgis prie laiko, vadinasi, negalėjo būti apskaičiuotas greitis. Toks apribojimas stabdė mechanikos plėtojimąsi 2000 metų – šiuolaikinis kiekybės dimesijos (dimension of a quantity) supratimas buvo suformuluotas škoto Džeimso Maksvelo (ang. James Maxwell) ir Peterio Janseno (ang. Peter Jansen) (ibid, p. 153). Būta papildomų komplikacijų: daugyba su tiesėmis buvo pasitelkiama gauti paviršius (surfaces), tiesių su paviršiais daugyba – rasti tūrius (volumes), tuo tarpu paviršių daugyba laikyta beprasme, kadangi linija kvadratu buvo kvadratas, o kubo – kubas. Visa tai neleido graikams susitvarkyti su didesniais nei trečio laipsnio daugianariais (ibid, p. 154).

Skirtis tarp skaičių ir dydžių sumažėjo arabų matematikų dėka. Italų matematikas Nikolas Fontana (ita. Niccolò Fontana Tartaglia) priekaištavo, jog matematikai maišo skaičių daugybą (ita. multiplicare) su dydžių daugyba (ita. ducere). Savo ruožtu Francua Viète (pranc. François Viète) teigė, jog algebra pranašesnė už geometrija tuo atžvilgiu, jog nėra apribota trečiojo laipsnio lygtimis. Dekartas pasinaudojo Viète teiginiu kaip atspirties tašku. Dekarto užmojis buvo redukuoti geometriją į sistemišką metodą. Tam padaryti jam reikėjo bendresnių būdų derinti dydžius, bet tam trugdė iš graikų likusi nuostata, jog skaičiais laikomi tik sveikieji teigiami skaičiai ir jų santykiai (ibid, p. 154). Siekiant padauginti ilgį BC iš ilgio BD ir kaip rezultatą gauti ilgį, būtina kaip vienetą pasirinkti ilgį *u*. Dekartas mano, jog pasirinkta gali būti laisvai. Kai vienetas pasirenkamas, siekiamas rezultatas gali būti išreikštas kaip ilgis p, patenkinantis proporciją *p*/BC = BD/1, taigi *p* = BC \* BD. Svarbu įvertinti poreikį vienetui. Nedera pamiršti, kad dydis yra kokybė. Tai nėra skaičius, pateikiamas įprastais matematiniais vienetais, tokiais kaip milimetras. Nors tos pačios rūšies dydžiai gali būti sudėti ir atimti ir gautieji skaičiai bus tos pačios rūšies dydžiai, nuo to skiriasi daugyba ir dalyba. Dydžių daugyba duoda aukštesnės dimensijos dydžius (magnitudes of higher dimesion), dėl to negalima klausti, ar tokia operacija turi vienetą, kadangi pagal apibrėžimą nėra tokio *u*, kad būtų gauta lygybė *ux* = *x.* Taip pat, dydžių santykiai neduoda dydžio: graikai neturėjo gryno (dimensionless) dydžio sąvokos. Suderinamų dydžių santykiai galėjo būti išreikšti tik proporcija, kurioje jie lyginami vienas su kitu. Proporcijoje skirtingų rūšių dydžių santykiai gali būti palyginti, bet santykiai nebuvo laikomi nei skaičiais nei dydžiais, todėl negalėjo būti aritmetiškai jungiami. Siekiant apibrėžti dydžių, kurie duoda tos pačios rūšies dydžius daugybos operaciją, reikalingas vienetas: viena bendriausių daugybos savybių yra jos tapatybė: *ux* = *xu* = *x .*Aišku, kad toks vienetas pasirenkamas laisvai, jei turime omeny ilgius – nėra priežasties kaip vienetą rinktis vieną ilgį vietoj kito. Vienintelis išskirtas ilgis yra nulinis ilgis, kuris negali būti vienetu, kadangi jis sunaikina daugybą (0*x* = *x*0 = 0). Todėl galimybė dauginti dydžius preziumuoja vienetą arba tiksliau, išskirtą vienetą kuris būtų tinkamas išreikšti tos rūšies dydžiams. Turint nurodytą vienetą, į dydžių sistemą įeina sveikieji skaičiai, kurie gali būti gaunami pakartotinai pridedant tą patį vienetą prie savęs, pavyzdžiui 1 = *u*, 2 = *u* + *u*, 3 = *u* + *u* + *u*, *x* = *ux.* Tokiu, Dekarto pasiūlytu budu, įmanoma tampa iš kontinuumo generuoti sveikuosius skaičius, aritmetika geometrizuojama (ibid, p. 154). Vis dėlto, tai nėra kelias, kuriuo sekė matematika, todėl buvo linkstama prie diskretumo. Tokia neformali demonstracija, suderinta su geometrijos aritmetizacija, parodo, kad tęstiniai arba diskretieji skaičiai gali būti laikomi tokiais, į kuriuos gali būti redukuoti kiti skaičiai.

Dekartas parodė kaip visos linijos gali būti pateikiamos statmenomis kryptymis, tai yra abscisių ir ordinačių ašyse. Taip buvo atrastos Karteziškosios koordinatės, nors platuma (latitude) ir ilguma (longitude) jau buvo eksplotuojamos kartografijoje. Dekartas pilnai nerealizavo geometrijos aritmetizacijos, suprantamos kaip tęstinųjų redukciją į diskrečiuosius skaičius. Jis redukavo geometriją į operacijas su dydžiais, kurie patys yra geometrijos objektai. Taigi, geometriją jis redukavo į labai paprastą geometrijos poaibį (ibid, p. 157).

# II SKYRIUS: GEOMETRIJOS ARITMETIZACIJOS PLĖTRA

## Dekarto „judesio“ reikšmė tolimesniam matematikų darbui

Kitas pažymėtinas bandymas aritmetizuoti geometriją buvo atliktas XVII amžiuje anglų matematiko Džono Valiso (angl. Wallis), vieno iš matematinės analizės pradininkų, pažymėtino dėl savo indelio į be galo mažų dydžių analizę (jam priskiriamas ir begalybės simbolio ∞ įvedimas). Valisas pateikė antrosios ir penktosios Euklido knygų aritmetinę traktuotę: iš pradžių jis išvedė lygtis iš klasikinių apibrėžimų pagal kūgio pjūvius, o jų savybes - atvirkščiai - išvedė iš lygčių „nesupainiodamas kūgio“ („without the embranglings of the cone“) (Stillwell, 2010, p. 120). 1655 m. Valisas išplėtojo Dekarto idėjas savo „Begalinumo aritmetikoje“, kurioje pateikė griežtą kintamojo ribos apibrėžimą, pirmąkart įvedė neigiamas abscises ir paskaičiavo begalinių eilučių reikšmes. Dekartas aritmetikos terminologiją (sudėtį, atimtį, daugybą, dalybą, kvadratinės šaknies traukimą) naudoja nurodyti operacijas su dydžiais, o apibrėžti dydžius pasitelkia algebrišką išraišką ) – jis sumažino skirtį tarp aritmetikos ir geometrijos, o tokia pati formulė gali būti pasitelkiama tiek skaičiams, tiek dydžiams. Gali atrodyti netikėta, kad Dekarto laikmečiu neigiami skaičiai nebuvo visuotinai priimti, tačiau tai gali būti paaiškinta graikiškuoju pasaulio supratimo modeliu: „How could you have a fewer than no pebbles in a Pythagorean figure? Or a negative length of area?“ (Mclennan, 2009, p. 158) Neigiamus skaičius Valisas priimė, bet laiko juos didesniais, nei begalybė. Dekartas, savo ruožtu, į savo sąvokinį aparatą jų neįsileido – „Geometrijoje“ jis teigia, kad kvadratinė lygtis su dviejomis neigiamomis šaknimis visai neturi šaknų. Į istoriją įėjo Valiso ir kito anglo, filosofo Tomo Hobso (angl. Thomas Hobbes) ketvirtį amžiaus trukęs kivirčas. Hobsas pasmerkė visus bandymus taikyti algebrą geometrijai, o Valiso traktatą apie kūgių pjūvius pavadino „simbolių šašu“ (scab of symbols)(Stillwell, 2010, p. 120). Didelę įtaką to meto pažiūroms turėjo iki 1750 m. gyvavusi Niutono (angl. Isaac Newton) nuostata, kad algebros taikymas linijų geometrijai ar kūgių pjūviams – nepriimtinas.

Algebros įstvirtinimo geometrijoje XIX amžiaus pradžioje nuopelnas priskiriamas italui Džozefui Luisui Lagreindžui (angl. Lagrange, gimė Giuseppe Ludovico Lagrangia), taip pat savo darbais procesą dinamizavusiems prancūzams Gasparui Monge (pranc. Gaspard Monge) ir Silvestrui Lakrua (pranc. Sylvestre François Lacroix). Elementarioji algebra įvesta į lygčių teoriją, išsivysčiusi aukštoji geometrija ima vis labiau priklausyti nuo skaičiavimų ir sudėtingųjų funkcijų teorijų, abstrakčiosios algebros ir XIX amžiuje „sužydėjusios“ topologijos. Aukštoji geometrija atskilo, ko pasekoje susiformavo diferencialinė ir algebrinė geometrijos . Elementarioji geometrija, esminis tokios plėtotės elementas, dabar žinoma analitinės geometrijos vardu (ibid, p. 121).

Naujai fundamentalią rolę analitinei geometrijai suteikė vokiečių matematikas Deividas Hilbertas (angl. David Hilbert). Hilbertas Valiso aritmetizaciją privedė prie loginės išvados, darydamas prielaidą, kad duoti tik realieji skaičiai ir rinkiniai ir taip iš jų konstruodamas euklidiškąją geometriją (ibid, p. 121): iš realiųjų skaičiųjų rinkinių R kaip porų (x, y) rinkinys konstruojama euklidiškoji plokštuma (angl. Euclidean plane) - duodamos aksiomos ir naudojama tomis aksiomomis paremta teorema. Tiesi linija yra taškų (x, y) rinkinys euklidiškojoje plokštumoje, pavyzdžiui ax + by + c = 0 pastoviems a, b, c. Tiesės lygiagrečios jei x ir y koeficientai – proporcingi. Atstumas tarp taškų (x1, y1) ir (x2, y2) apibrėžiamas Toks apibrėžimas paremtas Pitagoro teorema, kuri yra esminis jungties tarp aritmetikos ir geometrijos elementas.

Tokio apibrėžimo dėka visos aksiomos ir Euklido geometrijos teiginiai tampa įrodytini teiginiai apie lygtis. Pavyzdžiui, aksioma, teigianti, kad nelygiagrečios linijos turi bendrą tašką atitinką teoremą, kurioje tiesinės lygtys, tokios kaip:

turi sprendinį, kai a1b2 – b1a2 0

Hilbertas palaikė geometrinės intuicijos kaip atradimo metodo idėja: jis, kaip ir Niutonas, netikėjo, kad skaičiai gali būti geometrijos dalykas (ibid, p. 121). Jo aritmetikos tikslas buvo padėti loginius pagrindus geometrijai po to, kai XIX amžiuje geometrija buvo diskretizuota ir pakeista aritmetika kaip neginčijamu autoritetu matematikoje.

# IŠVADOS

Šiuo darbu buvo bandoma dekonstruoti Renė Dekarto analitinės geometrijos esminius principus, išskirtos kaip istoriškai svarbaus bandymo aritmetizuoti geometriją. Trumpai peržvelgtos istorinės analitinės geometrijos susiklostymo aplinkybės nurodė, kad ryšys tarp algebros ir geometrijos jau buvo tyrinėtas arabų matematikų rytuose, tačiau jų bandymai dėl praktinės orientacijos neatitiko Europos matematikų griežtumo (rigour) kriterijaus. Vis gi, įtaką Europos mokslininkams padarė arabų matematikų operavimas iracionaliaisiais skaičiais: dėl arabų įtakos ėmė nykti atskirtis tarp skaičių ir dydžių. Toks minties pagrindas Dekarto laikmečiu atskleidžia skaičiaus ir dydžio suderinamumo problemą, kurią Dekartas bandė galutinai įveikti. Svarbus elementas Dekarto bandyme yra laisvai pasirenkamasis vienetas (nelygus nuliui), reikalingas tos pačios rūšies dydžių daugybai, neaptinkamas graikų darbuose. Dėl laisvai pasirenkamo vieneto, dydžių sistemoje atsiranda sveikieji skaičiai. Dekarto būdu iš kontinuumo, geometrijos srities, gaunami sveikieji skaičiai.

Tai, kad Dekarto negalima vienareikšmiškai vadinti idėjos autoriumi, galima spręsti iš tiek jo filosofinės minties apraiškų scholastinėje filosofinėje tradicijoje, tiek diskusijų objekto tapusio klausimo dėl jo analitinės geometrijos idėjos pirmumo ryšiumi su Ferma. Dekarto karteziškųjų koordinačių komponentai, abscisių ir ordinačių ašys kaip ilgumos ir platumos sąvokos jau buvo aptinkamos kartografijoje. Vis dėlto, kaip ir filosofijoje, Dekartas pirmasis tokiu mąstu susistemino ankstesnės tradicijos apraiškas. Svarbu pažymėti, kad Dekartas tik redukavo geometriją į operacijas su dydžiais – pilnai geometrijos nearitmetizavo. Tai svarbu dėl dviejų priežasčių. Jis parodo, kokios sudėtingos geometrijos problemos gali būti išspręstos sistemišku procesu, į kurį įeina tik kelios aritmetinės operacijos. Be to, tai parodė kaip geometrija gali būti aritmetizuota jei tik tiesių atkarpos (realieji skaičiai) galėtų būti redukuoti į sveikuosius skaičius.

Dekartas pademonstravo kaip geometrija gali būti redukuota į aritmetines operacijas su linijiniais dydžiais, o jo bandymas buvo sistematiškesnis nei Euklido geometrija ir nebuvo apribota trijomis dimensijomis. Kitąvertus, praktiškai orientuota, bet ne griežta (nonrigorous) arabų algebra parodė, kad iracionaliaisiais skaičiais gali būti taip pat patikimai operuojama kaip ir sveikaisiais. (Mclennan, 2009, p. 157) Kartu su nykstančia riba tarp aritmetikos ir geometrijos, didesnis algebriškųjų technikų potencialas pritraukė daugiau žmonių perimti jos metodus. Problema buvo ta, jog geometrija galėjo pasiūlyti tik griežtą būdą operuoti iracionaliais skaičiais. Su lyg vis labiau plintančiu algebros naudojimu, XVII amžiaus matematikams aktuali tapo ne griežta algebros prigimtis. Dekartas, nors ir suprato algebros kaip mokslinio instrumento potencialą, buvo priverstas priimti Euklidiškąsias įrodinėjimo technikas.

# BIBLIOGRAFIJA

1. Stillwell, J. (2010) *Mathematics and Its History: Third Edition*. New York: Springer;
2. Tatarkiewicz, W. (2001) *Filosofijos istorija*, vol. 1. Vilnius: Alma Littera;
3. Mclennan, B. (2009) *The Arithmetization of Geometry* [dalomoji medžiaga]. Departament of Electrical Engineering & Computer Science, University of Tennessee, Knoxville, TN