Paskaita; 2016 m. vasario 5 d.

**Matematika ir filosofija: įvadas**

Rimas Norvaiša (http://www.norvaisa.lt)

*Kiekvienas geras matematikas yra pusiau filosofas ir*

*kiekvienas geras filosofas yra pusiau matematikas*

*Gottlob Frégé* (1848-1925) – vokiečių matematikas ir filosofas

Kursas ,,matematika ir filosofija“ nėra tradicinis, netgi universitete. Jis neturi visuotinai pripažinto turinio. Nors, Oksfordo universitete yra studijų programa tuo pačiu pavadinimu. Šio kurso turinys yra nulemtas asmeninės patirties ir yra įtakojamas susiklosčiusių aplinkybių. Kokios šio kurso ypatybės ir aplinkybės?

Pirma, tipišku šio kurso klausytoju laikau ne matematiką ir ne filosofą. Tai reiškia, kad klausytojas neprivalo būti susipažinęs nei su matematika ir, gal būt, nei su filosofija. Tokių klausytojų turėtų būti nemažai, nes filosofija nėra mokyklinio kurso disciplina, o mokyklinė matematika nesupažindina su tikrąja matematika. Norėdamas pasakyti kažką suprantamo ir prasmingo negaliu apeliuoti į klausytojo turimas žinias. Todėl minimalių žinių apie matematikq suteikimas yra šio kurso dalimi.

Antra, filosofija priklauso humanitarinių mokslų grupei, o matematika priklauso gamtos mokslų grupei. Toks skirtumas vertinant filosofiją ir matematiką mokslo administravimo požiūriu yra istorinių aplinkybių ir susiklosčiusių tradicijų rezultatas. Ne visur ir ne visada taip buvo. Toks klasifikavimas primeta nuomonę apie didžiulį šių žinojimo sričių skirtingumą.

Trečia, susipažinimas su filosofija yra plataus išsilavinimo požymis. Tuo tarpu matematika laikoma siauros srities žinių ir įgūdžių rinkiniu reikalingu tik kai kurioms profesijoms. Tokią nuomonę apie matematiką formuoja šiuolaikinė mokyklinė matematika.

Ketvirta, filosofija ir matematika turi tą patį *mokslų karalienės* titulą. Tiesa, viduramžiais mokslų karaliene buvo ir teologija. Bet, titulas šioms disciplinoms skiriamas dėl skirtingų priežasčių. Filosofija laikoma mokslų karaliene todėl, kad iš jos išsivystė dabartiniai mokslai. Tuo tarpu matematika laikoma mokslų karaliene todėl, kad ji pripažįstama esanti bendra mokslų kalba. Matematika laikoma mokslo kalba, nes jos pagalba formuluojami kiekybiniai dėsningumai ir modeliuojami realios tikrovės reiškiniai.

Šios aplinkybės ir mano kaip matematiko patirtis lemia tai, kad kursas iš esmės skirtas matematikos pažinimui. Tai nėra kursas apie matematikos ir filosofijos santykius. Filosofija šiuo atveju minima todėl, kad apie matematiką yra kalbama siekiant suprasti jos prasmę. Akcentas šiame kurse ne matematikos žinios, bet matematikos, kaip kultūros reiškinio, filosofinis supratimas.

 Filosofinis matematikos supratimas yra pagrindinių matematikos sąvokų ir problemų atsiradimo ir jų evoliucijos aiškinimasis. Pavyzdžiui, kaip kito skaičiaus samprata ir kas yra skaičius šiuolaikinėje matematikoje? Arba, kas yra matematinis įrodymas ir kaip jis atsirado? Žinau ne vieną panašaus pobūdžio matematikos nagrinėjimą. Pavyzdžiui, tokiomis yra įvado gale paminėtos matematiko *R.L. Wilder*io knygos.

Kodėl šis kursas galėtų būti įdomus ne matematikui ir nesiruošiančiam juo kada nors tapti? Atsakysiu glaustai ir išsamiai. Kalbant glaustai, kursas supažindina su mąstymo disciplinuotumu matematikos kontekste. Taip pat, kursas ugdo gebėjimus skirti įrodyta nuo neįrodyto, prasminga nuo beprasmio, bei suprantamą nuo nesuprantamo.

Kalbant išsamiai, šiame kurse galima susipažinti su nemokykline matematikos samprata. Matematiką kaip žinių sistemą sudaro matematiniai faktai ir jų pagrindimas (matematinis įrodymas). Matematika skirstoma į taikomąją ir grynąją, kurios yra to paties dalyko dvi pusės. Grynoji matematika yra pažįstama tik siauram matematikų-profesionalų ratui. Netgi fizikai, nuolat naudojantys matematikos rezultatus, retai kada nujaučia matematinę jų prasmę. Toliau kalbama apie grynąją matematiką, jei nepasakyta kitaip.

 Šiuolaikinės matematikos (tyrimo) objektais yra specialaus pobūdžio abstrakcijos, vadinamos *matematiniais objektais*. Matematiniu objektu gali būti tai, kas formaliai apibrėžiama ir gali būti matematinio samprotavimo (įrodymo) dalimi. Pavyzdžiui, skaičius yra tipiškas matematinis objektas. Skaičius nėra realaus pasaulio dalimi, kaip ir visi kiti matematiniai objektai.

Matematinis objektas vienareikšmiškai apibrėžiamas savo savybėmis, kurių visuma sudaro sąvoką. Tai reiškia, kad matematinis objektas turi tik tas savybes, kurios paminėtos sąvokos apibrėžtyje. Matematinės sąvokos vienareikšmiškumas yra labai svarbi savybė, nes ignoruojamas bet koks galimas jų atitikimas realaus pasaulio objektams.

Nors matematikoje naudojamos bendrinės kalbos sąvokos, bet jų prasmė dažnai skiriasi nuo tos, kuri naudojama ne matematikoje. Pavyzdžiui, tokiomis yra sąvokos laukas, žieda, realusis skaičius, kampas, išsireiškimas ,,galima rasti“ t.t. ir pan. Dar daugiau, matematikas ir nematematikas gali skirtingai suprasti teiginius. Pavyzdžiui, matematikui nėra skirtumo tarp ,,dviratis netoli garažo“ ar ,,garažas netoli dviračio“ (Uspenskis).

Įdomiausios matematinių objektų savybės yra faktai, paprastai formuluojami kaip teoremos. Pavyzdžiui, trikampis yra status tada ir tik tada, kai jo dviejų kraštinių ilgių kvadratų suma lygi trečiosios kraštinės ilgio kvadratui (Pitagoro teorema). Kitas faktas: yra be galo daug pirminių skaičių. Matematiniams faktams būdingas tikrumas (angl. *certainty*). Tokį jausmą šiems faktams suteikia matematinis įrodymas ir matematinių objektų abstraktumas. Tačiau ne visi matematikai turi panašią nuomonę dėl matematikos faktų tikrumo (pavyzdžiui, *Morris Kline*).

Matematinis įrodymas yra samprotavimas pagrindžianti fakto teisingumą. Samprotavimai gali būti skirtingo griežtumo (angl. rigour) loginio tikslumo prasme. Matematinio samprotavimo loginio tikslumo standartai keitėsi matematikos evoliucijos eigoje. Pavyzdžiui, Pitagoro teorema vadinamo fakto pagrindimui gali būti naudojams toks priešinys:



 Visiškai kitoks Pitagoro teoremos pagrindimas yra Euklido Pagrindų knygoje. Visi Euklido knygos teiginiai turi aksiominio-dedukcinio samprotavimo formą. Tačiau 19 a. pabaigoje ir 20 a. pradžioje, atsiradus matematinei logikai ir aibių teorijai, tas pats aksiominis-dedukcinis samprotavimas įgyjo gerokai didesnį loginį tikslumą. 1899 m. pasirodė *David*o *Hilbert*o pertvarkyta euklidinė geometrija. Aksiomomis grindžiamas samprotavimas tapo matematinio įrodymo standartu. Matematikos transformaciją šiuo laikotarpiu išsamiai atskleidžia *Jeremy Gray* knyga.

Lyginant su kitais mokslais, matematika gerokai skiriasi savo teiginių pagrindimu. Gamtos moksluose teorijos teisingumas grindžiamas jos gebėjimu paaiškinti realią tikrovę ir neprieštaravimu eksperimentams. Tuo tarpu matematinės teorijos teisingumas grindžiamas vidiniu loginiu neprieštaringumu, o naujų teorijų paieškas dažniausiai motyvuoja matematinio grožio jausmas.



Pagrindinis dėmesys šiame kurse skiriamas skaičiaus sampratai. Pirmose paskaitose pradedama nuo trupmenų. Bet jos apibrėžiamos ir nagrinėjamos kitaip nei mokykloje. Vėliau apžvelgiama skaičiaus sampratos evoliucija nuo seniausių laikų iki šių dienų. Ypatingas dėmesys yra skiriamas Zenono aporijoms ir jų matematinio aiškinimo problemiškumui. Kiti svarstomi klausimai: diskretumas versus tolydumas, baigtinumas versus begalybė, determinizmas versus atsitiktinumas. Kurso pabaigoje apžvelgiamos pagrindinės matematikos filosofijos kryptys.

Klausytojui rekomenduojama asmeniškai aktyviai dalyvauti diskutuojant paskaitose, atsiskaitymui paruošti esė pasirinkta tema.

**Literatūra**

* Jeremy Gray. Plato‘s Ghost. The Modernist Transformation of Mathematics. 2008.
* Morris Kline. Mathematics: The Loss of Certainty. 1980.
* Matematikos ir filosofijos studijų programa Oxford‘o universitete

<https://www.ox.ac.uk/admissions/undergraduate/courses-listing/mathematics-and-philosophy?wssl=1>

* Vladimiras Uspenskis. Matematikos apologija. (rusų kalba)
* Raymond L. Wilder. Introduction to the Foundations of Mathematics. Second Edition. Dover Publ. 2012.
* Raymond L. Wilder. Evolution of Mathematical Concepts. An Elementary Study. Dover Publ. 2013.