

J. STOUKUS.

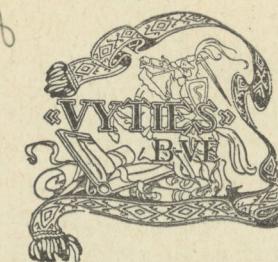
BEGALINIŲ MAŽYBIŲ ANALIZIO PAGRINDAI.

VADOVĖLIS AUKŠTESNIOSIAMS MOKYKLOMS.

„RAIDĖS“ SPAUSTUVĖ
KAUNE, LAISVĖS AL. 35. Tel. 758

Vadovėlis Šv. Min-jos Mokslo Priemonių ir Knygų Tirkramosios Komisijos pripažintas tinkamu aukštesniosioms mokykloms (raštas 1925 m. birželio mėn. 25 d., Nr. 6586).

LVISS
6648



„VYTIES“ BENDROVĖS LEIDINYS.
KAUNAS.
1925.

I. Apie ribas.

§ 1. Pastovieji ir kintamieji dydžiai.

Nagrinėdami įvairius matematikos klausimus, gauname pātirti, jog vieni dydžiai niekumet arba tiktais tam tikrame klausime nesikeičia, t. y., turi visumet tą pačią reikšmę, kiti gi gali turėti įvairių reikšmių. Pirmieji yra vadinami pastoviais dydžiais, o antrieji — kintamais. Pav., trikampio kampų suma yra pastovusis dydis, nes ji visumet turi tą pačią reikšmę, lygią $2d$, o kiekvienas trikampio kampus gali būti kintamas dydis, nes gali turėti įvairių reikšmių. *Duotojo* apskritimo spindulys yra pastovusis dydis, o jo stygos ilgumas yra kintamas dydis.

Kurie dydžiai kuriame klausime yra pastovūs ir kurie kintami, eina iš pačios nagrinėjamojo klausimo esmės. Todel, dydžiai, kurie buvo pastovūs viename klausime, gali būti kintami kitame klausime ir atvirkšciai. Įsivaizduokime, pav., nekintamą skritulį, ir tegu nuo jo centro atskiria styga, slinkdama taip, kad nuolat liekasi lygiagretė su savo išeities padėtimi. Tada skritulio skersmuo bus pastovus, o slenkančios stygos didumas kitės. Įsivaizduokime, atvirkšciai, kad styga lieka nekintamoje padėtyje, o skritulio centras tolsta nuo jos, pasilikdamas nuolat statmenyje, iškeltame iš stygos vidurio. Tada stygos didumas bus pastovus, o skritulio skersmuo kitės.

§ 2. Begalinės mažybės.

Kintamajį dydį vadina begaline mažybe (arba be galomažu, arba be galos mažėjančiu, arba artėjančiu nuliui), jei, be kintant jam tam tikru būdu, absolutinis jo didumas gali darytis ir likti mažesnis už bet kurį duotąjį mažą teigiamą dydį.

Štai keli begalinių mažybų pavyzdžiai.

1) $\frac{1}{x}$ yra begalinė mažybė, jeigu teigiamas skaičius x be galos didėja. Iš tikrujų, užtenka paimti $x > 10000000$, kad pasidarytų

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{10000000}.$$

Ir, suprantama, x -ui didėjant toliau, trumpmena $\frac{1}{x}$ liks mažesnė už

$\frac{1}{10000000}$; taigi, trumpmena $\frac{1}{x}$ yra begalinė mažybė.

2) Centrinis taisyklingojo daugiakampio kampus, kurio didumas lygus $\frac{360^{\circ}}{n}$, yra begalinė mažybė, kai jo kraštinių skaičius n be galo didėja. Iš tiesų, jeigu norime, kad būtų

$$\frac{360^{\circ}}{n} < 0,000001^{\circ},$$

tad užtenka paimti $n > 360000000$. Ir, suprantama, skaičiui n toliaus bedidėjant, centrinis kampus $\frac{360^{\circ}}{n}$ nuolat bus mažesnis už $0,000001^{\circ}$; taigi, jis yra begalinė mažybė.

3) Skirtumas $y - 3$ yra be galo mažas, jei y , būdamas nuolat didesnis už 3, be galo artėja trims. Iš tikrujų, jeigu norime turėti nelygybę

$$y - 3 < 0,0001,$$

tad užtenka paimti $3 < y < 3,0001$. Ir, suprantama, y -ui toliau be mažėjant (tačiau, y visumet lieka didesnis už 3), skirtumas $y - 3$ mažesnis už $0,0001$; taigi, tas skirtumas yra be galo mažas. Iš begalinės mažybės apibrėžimo eina, kad begalinė mažybė yra visų pirma kintamasis dydis. Del to, būtų be prasmės pavadinti begalinė mažybė atskirą skaičių, kad ir rodytu si jis

mažokas, pav., $\frac{1}{10^{10}}$, nes tai yra pastovusis dydis. Bet, žinoma, ir ne kiekvienas kintamasis dydis gali būti pavadintas begalinė mažybė, bet tik toks, kurs, einant tam tikram kitimo procesui, gali darytis ir likti mažesnis už bet kurį išanksto duotą, kaip norima maža, teigiamą dydį.

§ 3. Begalinės didybės.

Kintamajį dydį vadina begalinė didybė (arba be galo didelė, arba be galo didėjančiu, arba artėjančiu begalybei), jei, abekintant jam tam tikru būdu, absolutinis jo didumas gali daugytis ir likti didesnis už bet kurį duotą didelį teigiamą dydį.

Pažiūrėkime kelis begalinijų didybų pavyzdžius.

1) Iškilojo daugiakampio vidaus kampų suma, lygi $180^{\circ}(n-2)$, del be galo didėjant kraštinių skaičiui n , yra begalinė didybė,

to kad a) ta suma yra kintamasis dydis ir b) tas kintamasis dydis gali darytis ir likti didesnis už bet kurį duotą didelį teigiamą dydį. Iš tiesų, pav., reikalavimas, kad

$$180^{\circ}(n-2) > 100000^{\circ},$$

yra patenkinamas, esant bet kuriam $n > 558$.

2) Reiškinys $\frac{x^2+x}{2}$, x -ui be galo didėjant, yra begalinė didybė. Iš tiesų, jei norime, kad būtų

$$\frac{x^2+x}{2} > 1000,$$

tad užtenka paimti $x > 45$. Ir, aišku, x -ui toliaus bedidėjant, $\frac{x^2+x}{2}$ nuolat bus didesnis už 1000; taigi, šis reiškinys yra begalinė didybė.

Kaip ir begalinijų mažybų atveju, reikia atminti, jog iš begalinės didybės apibrėžimo eina, kad begalinė didybė yra visų pirma kintamasis dydis. Del to, negalima pavadinti, pav., 10^{100} begaline didybe, nes tai yra pastovusis dydis. Bet, kita vertus, ir ne visoks didėjasi kintamasis dydis gali būti pavadintas begaline didybe, bet tik toks, kurs, einant tam tikram kitimo procesui, gali darytis ir likti didesnis už bet kurį išanksto duotą, kaip norima didelį, teigiamą dydį.

§ 4. Begalinijų mažybų veiksmai.

Su begalinėmis mažybėmis galima veikti tie patys veiksmai, kurie yra veikiams su baigtiniais dydžiais. Remiantis begalinės mažybės apibrėžimu, del tų veiksmų galima įrodyti šios teoremos.

Pastebėsime, kad absoliutinis kurios nors tiekybės a didumas yra žymimas tuo, kad ji yra statoma tarp dviejų vertikalių brėžių: $|a|$.

I. Teorema. Baigtinio begalinijų mažybų skaičiaus suma yra begalinė mažybė.

Tegu turime n begalinijų mažybų (skaičius n baigtinis): $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$. Reikia įrodyti, kad jų suma $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda$ yra begalinė mažybė.

Paėmę bet kurį kaip norima mažą teigiamą dydį ϵ ir atminę, kad $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ yra begalinės mažybės, turime teise, remdamiesi begalinės mažybės apibrėžimu, sakyti

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{n}, |\beta| < \frac{\varepsilon}{n}, |\gamma| < \frac{\varepsilon}{n}, \dots, |\lambda| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Sudėjė šias nelygybes, gausime

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + \dots + |\lambda| < \varepsilon;$$

bet kadangi

$$|\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda| \leq |\alpha| + |\beta| + |\gamma| + \dots + |\lambda|,$$

tai ir

$$|\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda| < \varepsilon,$$

t. y., absoliutinis duotųjų begalinių mažybų sumos didumas yra mažesnis už bet kurį mažą teigiamą dydį ε ; vad., ta suma yra begalinė mažybė, kas ir reikėjo įrodyti.

Pastebėjimas. Jeigu dėmenų skaičius n yra be galo didelis, tai tuo atveju begalinių mažybų suma gali būti be galo maža, baigtinė arba dar gi be galo didelė. Pav., jeigu n yra sveika, be galo didėjasi, skaičius, tai suma

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2},$$

kurių kiekvienas dėmuo yra begalinė mažybė, bus lygi be galo mažam skaičiui $\frac{1}{n}$, jei dėmenų paimsime n ; jeigu tokius dėmenų paimsime n^2 , tai ta suma bus lygi 1; o jeigu tokius dėmenų paimsime n^3 , tai ta suma bus lygi be galo dideliam skaičiui n .

II. Teorema. *Dviejų begalinių mažybų skirtumas yra begalinė mažybė.*

Tegu turime dvi begalini mažybė α ir β . Padėjė, kaip I atveju,

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, |\beta| < \frac{\varepsilon}{2},$$

gausime

$$|\alpha| + |\beta| < \varepsilon;$$

bet kadangi

$$|\alpha - \beta| = |\alpha + (-\beta)| \leq |\alpha| + |\beta|,$$

tai ir

$$|\alpha - \beta| < \varepsilon,$$

t. y., absoliutinis dviejų begalinių mažybų skirtumo didumas yra mažesnis už bet kurį mažą teigiamą dydį ε ; vad., tas skirtumas yra begalinė mažybė.

III. Teorema. *Begalinių mažybės ir baigtinio dydžio sandauga yra begalinė mažybė.*

Tegu turime kurią nors begalinę mažybę α ir bet kurį baigtinį dydį n . Reikia įrodyti, kad jūdvių sandauga αn yra begalinė mažybė.

Kadangi α yra begalinė mažybė, tai galime padaryti taip, kad

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{|n|},$$

kur ε yra bet kuris, kaip norima mažas, taigiamas dydis. Iš tos nelygybės eina nelygybė

$$|\alpha| \cdot |n| < \varepsilon;$$

bet kadangi

$$|\alpha n| = |\alpha| \cdot |n|,$$

tai ir

$$|\alpha n| < \varepsilon$$

t. y., absoliutinis begalinės mažybės ir baigtinio dydžio sandaugos didumas yra mažesnis už bet kurį mažą teigiamą dydį ε ; vad., ta sandauga yra begalinė mažybė.

IV. Teorema. *Dviejų ar kelių begalinių mažybų sandauga yra begalinė mažybė.*

Tegu α ir β yra dvi begalini mažybė. Paémę, kaip ir kitais atvejais,

$$|\alpha| < \sqrt{\varepsilon} \text{ ir } |\beta| < \sqrt{\varepsilon},$$

gausime

$$|\alpha| \cdot |\beta| < \varepsilon,$$

arba

$$|\alpha \beta| < \varepsilon,$$

kas parodo, jog dviejų begalinių mažybų sandauga yra begalinė mažybė.

Panašiai teorema įrodoma ir tada, kai daugiklių yra keli.

V. Teorema. *Begalinių mažybės ir baigtinio dydžio dalimasis yra begalinė mažybė.*

I šią teoremą galima žiūrėti, kaip išsvadą teoremos apie begalinės mažybės ir baigtinio dydžio sandaugą (p. III), del to kad padalyti iš baigtinio dydžio yra tas pats, kaip ir padauginti iš dydžio, atvirkštinių daliklių,

vi. Dviejų begalinijų mažybų santykis gali būti:

a) pastovus dydis, pav.,

$$\frac{3\alpha}{\alpha} = 3$$

(čia ir toliau α yra begalinė mažybė)

b) kintamas baigtinis dydis, pav.,

$$\frac{(3x+2)a}{a} = 3x+2$$

(čia x yra baigtinis kintamasis dydis).

c) be galio mažas dydis, pav.,

$$\frac{3a^2}{a} = 3a;$$

č) be galio didelis dydis, pav.,

$$\frac{3a}{a^2} = \frac{3}{a}.$$

VII. Kadangi santykiamas

$$\frac{3a}{a}, \quad \frac{(3x+2)a}{a}, \quad \frac{3a^2}{a}, \quad \frac{3a}{a^2}$$

galima duoti atitinkamai pavidalas

$$\frac{1}{a} \cdot 3a, \frac{3x+2}{a} \cdot a, \frac{1}{a} \cdot 3a^2, \frac{1}{a^2} \cdot 3a,$$

tai, remdamiesi VI p., galime sakyti, kad begalinės mažybės ir begalinės didybės sandauga gali būti dydis pastovus, kintamas baigtinis, be galo mažas ir be galo didelis.

§ 5. Begalinių mažybių eilės

Nors visos to paties kitimo proceso begalinės mažybės vienkart artėja nuliui, bet, einant tam procesui, jos gali kisti labai įvairiai, didesniu ar mažesniu greitumu artėdamos nuliui. Paskutiniuose kitimo momentuose begalinių mažybių įvairumas gali būti toks, kad viena jų praneša kitą didžiausią, beveik neįsivaizduojamą, skaičių kartą. Pav., jeigu a yra be galio mažas skaičius, tai vienkart su tuo artėja nuliui ir skaičiai $\frac{a^2}{2}, \frac{a^3}{3}, \frac{a^4}{4}$ ir t.t. Bet tuo momentu, kada a pasieks mažybės, pav., $\frac{1}{10^{10}}$, kiti skaičiai pavirs $\frac{1}{2 \cdot 10^{20}}, \frac{1}{3 \cdot 10^{30}}, \frac{1}{4 \cdot 10^{40}}$ ir t.t., ir pasirodys, kad

tuo momentu pirmasis skaičius yra didesnis už antrąjį $2 \cdot 10^{10}$ kartų, didesnis už trečiąjį $3 \cdot 100^{10}$ kartų, didesnis už ketvirtąjį $4 \cdot 1000^{10}$ ir t. t.

Daugelyje klausimų, kuriuose pasitaiko kelios begalinės mažybės, būna svarbu palyginti jos tarp savęs. Tam tyrinėja jų santykius viena su kita. Ivairiems nuotikiams pažymėti yra varotojami šie bendri terminai:

a) jeigu dviejų begalinių mažybių β ir α santykis $\frac{\beta}{\alpha}$ yra baigtinis skaičius, nelygus nuliui, tai sako, kad β ir α yra begalinės mažybės vienodos eilės;

b) jeigu dviejų begalinių mažybių β ir α santykis $\frac{\beta}{\alpha}$ yra nauja begalinė mažybė, tai sako, kad β yra aukštesnės eilės, negu α ;

c) jeigu dviejų begalinių mažybių β ir a santykis $\frac{\beta}{a}$ yra begalinė didybė, tai sako, kad β yra žemesnės eilės, negu a .

§ 6. Ribos.

Jeigu kintamasis dydis, bekisdamas, artėja kai kuriam pastoviajam dydžiui taip, kad absoliutinis jūdviejų skirtumo didumas gali darytis ir likti begalinė mažybė, tai pastovusis dydis vadinasi kintamojo riba.

Imkime kelis pavyzdžius.

1) Trupmena $\frac{x-1}{x}$, ($x > 0$) be galio didėjant x -ui, yra kintamasis dydis. Pažiūrėkime, kaip kinta skirtumas tarp pastovaus dydžio 1 ir tos trupmenos. Matome, kad tas skirtumas, būdamas lygus

$$1 - \frac{x-1}{x} = \frac{1}{x}$$

be galo mažėja, kai x be galo didėja. Vad., 1 yra kintamosios trupmenos $\frac{x-1}{x}$ riba, kai x be galo didėja.

2) Dešimtainė perijodinė trupmena 0,777..... yra kintamasis dydis, kai dešimtainių skaitmenų skaičius be galio didėja. Jai galima duoti pavidales

$$0,777\dots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots$$

Parodysime, kad $\frac{7}{9}$ yra tos trupmenos riba. Sudarydami skirtumus

$$\frac{7}{9} - \frac{7}{10} = \frac{7}{9 \cdot 10},$$

$$\frac{7}{9} - \left(\frac{7}{10} + \frac{7}{100} \right) = \frac{7}{9 \cdot 10^2},$$

$$\frac{7}{9} - \left(\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} \right) = \frac{7}{9 \cdot 10^3},$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

matome, kad tie skirtumai, didėjant be galo dešimtainių skaitmenų skaičiui, gali darytis ir likti mažesni už bet kurį mažą teigiamą dydį; vad., $\frac{7}{9}$ yra trupmenos 0,777..... riba.

Šiuose pavyzdžiuose kintamasis buvo mažesnis už savo ribą. Bet jis gali artėti savo ribai, būdamas arba nuolat didesnis už ją arba kartais didesnis, kartais mažesnis už ją, pav.,

3) trupmena $\frac{x+1}{x}$, x -ui didėjant, mažėja, artėdama 1, kuris ir yra jos riba, pati gi trupmena yra lygi $1 + \frac{1}{x}$, t. y., ji yra didesnė už 1 ($x > 0$).

Jeigu kurs nors kintamasis x turi ribą a , tai tatai pažymima taip:

$$\lim x = a,$$

kur „lim“ yra pirmosios raidės prancūziško žodžio „limite“ (arba lotyniško „limes“), kurs reiškia „riba“, pav., $\lim 0,777\dots = \frac{7}{9}$.

Be to, jeigu kintamojo dydžio kitimas pareina nuo kito kintamojo dydžio kitimo, tai paprastai apačioje nurodytojo simbolio žymima ta antrojo dydžio reikšmė, kurią jai pasiekus, pirmasis dydis pasiekia savo ribą. Pav.,

$$\lim_{x=0} (5x) = 0.$$

iš ribos sąvokos cina, kad, jeigu $\lim x = a$, tad galime rašyti

$$x = a + a,$$

$$x = a - a,$$

$$x = a \pm a,$$

arba

arba

kur a yra kintamasis be galo mažas dydis, virstas nulium, kai x pasiekia savo ribą a .

Kintamasis dydis, kuris gali artėti nuliui, kaip savo ribai, vadinasi begalinė mažybė.

Kintamasis dydis, kurio absolutinis didumas gali darytis ir likti didesnis už bet kurį duotą teigiamą dydį, vadinasi begalinė didybė. Jeigu x yra begalinė didybė, tai tatai pažymima taip: $\lim x = +\infty$ arba $\lim x = -\infty$. Toks užrašas turi salyginį pobūdį, nes, aišku, šiuo atveju nėra jokio pastoviojo dydžio, kuriam x be galo artėtų. Ir vieno, ir kito tiksliai prasmė yra tokia: kintamasis dydis x , bekisdamas, pasiekia savo apsolutiniu didumu tokį teigiamų reikšmių, kurios gali pranešti visokį duotą teigiamą dydį, kad ir kaip šis būtų didelis, ir, žinoma, pasiekęs didelęs reikšmęs, pav., 100000, toliau bekisdamas, visą laiką lieka didesnis už 100000.

§ 7. Pagrindiniai ribų dėsniai.

Visuose protavimuose, kuriuose tenka turėti reikalo su ribomis, remiamasi šiais dėsniais:

1) jeigu kintamasis dydis, nuolat didėdamas, visumet lieka mažesnis už kai kurį apibrėžtą dydį a , tai toks kintamasis turi ribą, kuri arba yra lygi a , arba yra mažesnė už a ;

2) jeigu kintamasis dydis, nuolat mažėdamas, visumet lieka didesnis už kai kurį apibrėžtą dydį a , tai toks kintamasis turi ribą, kuri arba yra lygi a , arba yra didesnė už a ;

3) tas pats kintamasis dydis, bekisdamas vienу apibrėžtu būdu, negali artėti dviem nelygiom viena kitai ribom a ir b .

Šis pastarasis sakymas lengva suprasti. Iš tiesų, tegu būna priešinga, t. y., tegu kintamasis x turi dvi nelygi viena kitai ribi a ir b . Tada, remdamiesi ribos apibrėžimu, turėsime

$$x = a + a$$

$$x = b + \beta$$

ir
iš kur

$$a + a = b + \beta,$$

$$a - b = \beta - a.$$

arba
t. y., dvięj nelygi pastovių dydžių skirtumas yra lygus begalinėi mažybei. Tokio rezultato nesąmomė verčia atmesti manymą, kad a ir b esą nelygūs.

§ 8. Sumos riba.

Tegu turime baigtinį skaičiaus kintamųjų dydžių, kurie artėja savo riboms, t. y., tegu

$\lim x=a$, $\lim y=b$, $\lim z=c$, ..., $\lim v=l$, ... (1)
taip kad, remdamiesi ribos apibrėžimu, galime rašyti
 $x=a+a$, $y=b+\beta$, $z=c+\gamma$, ..., $v=l+\lambda$,
kur $a, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ yra begalinės mažybės.

Sudėjė pastarąsias lygybes panariui, gauname

$$x+y+z+\dots+v=(a+b+c+\dots+l)+(a+\beta+\gamma+\dots+\lambda) \dots (2)$$

Kadangi suma $a+\beta+\gamma+\dots+\lambda$ yra be galo maža (§ 4, I), tai, eidami ribos apibrėžimu, vietoje pastarosios lygybės (2) galime rašyti jai tolygią

$$\lim(x+y+z+\dots+v)=a+b+c+\dots+l,$$

iš kurios, pakeitę dešiniosios pusės dėmenis jiems lygiai reiškiniais iš lygybių (1), gauname

$$\lim(x+y+z+\dots+v)=\lim x + \lim y + \lim z + \dots + \lim v, \dots (3)$$

t. y., baigtinio skaičiaus kintamųjų dydžių sumos riba yra lygi visų dėmenų ribų sumai.

Pastebėjimas. Ši išvada nustoja galios, jei dėmenų skaičius yra be galo didelis, nes tuo atveju mes gautumėme dešinėje lygybės (2) pusėje be galo didelio skaičiaus begalinių mažybų sumą, kuri gali ir nebūti be galo maža (§ 4, I, past.).

§ 9. Skirtumo riba.

Tegu turime du kintamuojų dydžiu, artėjančiu savo ribom, t. y., tegu

$$\lim x=a \text{ ir } \lim y=b; \dots (1)$$

todel, galime rašyti

$$x=a+a \text{ ir } y=b+\beta,$$

kur a ir β yra begalinės mažybės.

Atémę pastarąsias lygybes viena iš kitos panariui, gauname

$$x-y=(a-b)+(a-\beta) \dots (2)$$

Kadangi skirtumas $a-\beta$ yra be galo mažas (§ 4, II), tai lygybę (2) pakeičiame jai tolygiai

$$\lim(x-y)=a-b,$$

iš kurios, imdami dėmesin lygybes (1), gauname

$$\lim(x-y)=\lim x - \lim y, \dots (3)$$

t. y., dviejų kintamųjų dydžių skirtumo riba yra lygi tų pačių kintamųjų dydžių ribų skirtumui.

§ 10. Sandaugos riba.

1) Dviejų kintamųjų daugiklių sandauga.

Tegu turime

$$\lim x=a \text{ ir } \lim y=b \dots (1)$$

Iš čia

$$x=a+a \text{ ir } y=b+\beta,$$

kur a ir β yra begalinės mažybės. Sudauginę pastarieji lygybi panariui, gauname

$$xy=ab+(ba+a\beta+a\beta) \dots (2)$$

Kadangi ba , $a\beta$ ir $a\beta$ yra begalinės mažybės (§ 4, III—IV), tai ir suma $ba+a\beta+a\beta$ yra be galo maža; todel, iš lygybės (2) riboje gauname

$$\lim(xy)=ab,$$

arba, atsižvelgę į lygybes (1),

$$\lim(xy)=\lim x \cdot \lim y \dots (3)$$

2) Kelių kintamųjų daugiklių sandauga.

Tegu turime trijų kintamųjų dydžių sandaugą xyz . Jai galima duoti pavidalas $(xy) \cdot z$, ir del to,

$$\lim(xyz)=\lim[(xy) \cdot z]=\lim(xy) \cdot \lim z.$$

Istatę šioje lygybėje vietoje $\lim(xy)$ jai lygū reiškinį iš lyg. (3), gauname

$$\lim(xyz)=\lim x \cdot \lim y \cdot \lim z \dots (4)$$

Tokiu pat būdu ir bet kuriam baigtiniams skaičiui daugiklių x, y, z, \dots, v galime irodyti, kad

$$\lim(xyz\dots v)=\lim x \cdot \lim y \cdot \lim z \dots \lim v, \dots (5)$$

t. y., baigtinio skaičiaus kintamųjų dydžių sandaugos riba yra lygi jų ribų sandaugai.

Išvada. Jeigu lygybėje (5) $x=y=z=\dots=v$ (viso m daugiklių), tai

$$\lim(x^m)=(\lim x)^m \dots (6)$$

§ 11. Dalmens riba.

Tegu duota

$$\lim x=a \text{ ir } \lim y=b \dots (1)$$

Iš čia eina

$$x=a+\alpha \text{ ir } y=b+\beta,$$

kur a ir β yra begalinės mažybės. Padaliję pirmąjį šiūdviejų lygybių iš antrosios, gauname

$$\frac{x}{y} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \frac{ba-a\beta}{b(b+\beta)}; \dots \dots \dots \quad (2)$$

bet ba ir $a\beta$ yra begalinės mažybės (§ 4, III), del to, ir skirtumas $ba-a\beta$ yra be galo mažas (§ 4, II), ir, vad., jei b nėra nulius, tai ir $\frac{ba-a\beta}{b(b+\beta)}$ yra begalinė mažybė (§ 4, V), o del to, lygybė (2) duoda

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{a}{b},$$

arba

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}, \dots \dots \dots \quad (3)$$

t. y., dviejų kintamųjų dydžių dalmens riba yra lygi jūdvieju ribų dalmeniui.

Jei $b=0$, tai ši išvada nustoja galios, nes padalyti iš 0 negalima.

§ 12. Ribų metodas.

Papildydami išdėstytaisias ribų teoremas, pridursime, kad sveikojo rodiklio šaknies ribos teoremą lengvai gausime, pasinaudodami laipsnio ribos teorema [§ 10, form. (6)], ir kad nesunku yra išplėsti gautąsią išvadas trupmeninių rodiklių laipsniams ir šaknims.

Visa tai veda prie tokios svarbios išvados: jeigu kintamieji dydžiai yra surišti kuria nors formula, tai tokia pat formula yra surištos ir jų ribos. Taip antai, jei

$$y=4x^3-2\operatorname{tg}x+3\lg\sqrt{x},$$

tai

$$\lim y = 4(\lim x)^3 - 2\operatorname{tg}(\lim x) + 3\lg\sqrt{\lim x}.$$

Mes negalime čia įrodyti šios išvados visu bendrumu, pastebėsime tik, kad ji yra teisinga visais tais atskirais atvejais, kuriuos lig šiol peržiūrėjome.

Ši išvada yra vadinamojo ribų metodo pagrindas. Juo dažnai naudojasi matematikoje įvairiais klausimais ir štai kaip.

Jeigu reikia rasti kurie nors pastovieji dydžiai, bet betarpiskai tai padaryti negalima arba labai sunku; tad į juos žiūrima, kaip į kai kurių kintamujų dydžių ribas. Tuos kintamuosius parenka paprastai tokius, kurių ypatybės lengvai duodasi nagrinėti ir tarp kurių galima nustatyti šioks ar toks santykavimas lygčių pavidale. Pakeitę gautosiose lygtystėse, remdamiesi išvestomis teoremomis, visus kintamuosius atitinkamomis jų ribomis, gauna santykavimą, iš kurio ir gali surasti ieškomajį pastovųjį dydį.

Naudodamiesi ribų metodu, surasime apskritimo ilgumą ir rutulio tūri.

§ 13. Apskritimo ilgumas.

Duotojo spindulio apskritimo ilgumas yra dydis pastovus. Bet išmatuoti tas ilgumas paprastais ilgio matais negalima, kadaangi jokia kreivosios linijos dalis nesutampa su tiesiaja. Apskritimo ilgumas yra surandamas ribų metodu.

Pirmiausia, išsiaiškinkime, ką vadina apskritimo ilgumu.

Įsivaizduokime du taisyklingu vienavardžiu daugiakampiu: vieną įbrėžtą į apskritimą, o kitą apibrėžtą aplink jį. Imkime be galo dvejinti jūdvieju kraštinių skaičių. Tada tų daugiakampių perimetrai p ir P bus kintamieji dydžiai. Iš geometrijos žinome, kad taisyklingojo apibrėžtojo daugiakampio perimetras yra didesnis už taisyklingojo įbrėžtojo daugiakampio perimetram ir kad, taisyklingojo įbrėžtojo daugiakampio kraštinių skaičiui dvejėjant, jo perimetras didėja, bet negali būti didesnis už apibrėžtojo daugiakampio perimetram. Vad., einant pagrindinių ribų dėsnį (§ 7) p. 1, įbrėžtojo daugiakampio perimetras p turi artėti kai kuriai ribai c , t. y., $\lim p=c$, arba $p=c-a$, kur a yra begalinė mažybė.

Panašiai galvodami, randame, kad ir apibrėžtojo daugiakampio perimetras P , einant pagrindinių ribų dėsnį (§ 7) p. 2, turi turėti kai kurią ribą C , t. y., $\lim P=C$, arba $P=C+\beta$, kur β yra begalinė mažybė.

Iš pasakytojo eina, kad

$$P-p=(C-c)+(a+\beta).$$

Skirtumas $P-p$ yra kintamasis dydis, skirtumas $C-c$ yra pastovus, o suma $a+\beta$ yra begalinė mažybė. Vad., einant ribos apibrėžimu, vietoje pastarosios lygybės galime rašyti

$$\lim(P-p)=C-c;$$

bet, kaip žinome iš geometrijos, skirtumas $P-p$, be galio dvejant kraštinių skaičiui, artėja nuliui, t. y.,

$$\lim(P-p)=0,$$

o, del to, ir

$$C-c=0,$$

$$C=c.$$

arba

$$c=\lim p=\lim P \quad (P>c>p).$$

Vad., Taigi, abiejų daugiakampių perimetrai artėja tai pačiai ribai, kurią ir vadina apskritimo ilgumu.

Dabar suraskime apskritimo ilgumą.

Tegu turime du apskritimu spindulius r_1 ir r . Apskritimų ilgumus pažymėkime atikinkamai c_1 ir c . Ibrėžkime į tuodu apskritimu du bet kuriu taisyklinguoju vienavardžiu daugiakampių ir imkime be galio dvejinti jų kraštinių skaičių. Jeigu kintamuosis tų daugiakampių perimetrus pažymėsime atitinkamai p_1 ir p , tai

$$\frac{p_1}{p} = \frac{r_1}{r},$$

iš kur

$$\frac{p_1}{r_1} = \frac{p}{r}.$$

Pereidami prie ribos, gauname

$$\lim\left(\frac{p_1}{r_1}\right) = \lim\left(\frac{p}{r}\right), \text{ arba } (\S 11) \quad \frac{\lim p_1}{r_1} = \frac{\lim p}{r}.$$

Bet $\lim p_1 = c_1$ ir $\lim p = c$; vad.,

$$\frac{c_1}{r_1} = \frac{c}{r},$$

iš kur

$$\frac{c_1}{2r_1} = \frac{c}{2r}.$$

Tokiu būdu, apskritimo ilgumo ir skersmens santykis yra tas pats visiems apskritimams, t. y., tas santykis yra pastovusis dydis. Tą pastovųjį dydį paprastai žymi raide π , taip kad

$$\frac{c}{2r} = \pi,$$

iš kur

$$c = 2\pi r.$$

§ 14. Rutulio tūris.

Įsivaizduokime pusapskritimą su skersmeniu $AB=2R$. Ibrėžkime į tą pusapskritimą ir apibrėžkime aplink jį dvi taisyklingieji vienavardi laužtini liniji ir imkime sukti juos aplink skersmenį AB . Tada pusdaugiakampis, apribotas laužtine linija ir skersmeniu, duos daugiasienį kūną (ibrėžtą), pusapskritimis — rutulį, o pusdaugiakampis, apribotas laužtine linija ir pratęstu skersmeniu, kitą daugiasienį kūną (apibrėžtą).

Pažymėjė ibrėžtojo ir apibrėžtojo daugiasienių tūrius atitinkamai v ir v_1 ir galvodami taip, kaip pereitame § 13, prieiname prie išvados, kad kintamasis tūris v turi artėti kai kuriai ribai V , o kintamasis tūris v_1 ribai V_1 , taip kad $\lim v = V$ ir $\lim v_1 = V_1$, arba $v = V - a$ ir $v_1 = V_1 + \beta$, kur a ir β yra begalinės mažybės. Iš čia gauname

$$v_1 - v = (V_1 - V) + (a + \beta),$$

$$\text{arba } \lim(v_1 - v) = V_1 - V \dots \dots \dots \quad (1)$$

Iš geometrijos žinome: tūris kūno, gauto taisyklingosios daugiakampės išpjovos sukimu aplink aši, einančią per jos centrą, yra lygus gautojo kūno paviršiaus ir laužtinės linijos apotémės $\frac{1}{3}$ sandaugai. Todel, pažymėjė s ir s_1 atitinkamai ibrėžtojo ir apibrėžtojo daugiasienių paviršius, o a laužtinės linijos apotémę, turime

$$v_1 = \frac{1}{3} s_1 R \text{ ir } v = \frac{1}{3} sa,$$

$$\text{iš kur } v_1 - v = \frac{1}{3} (s_1 R - sa).$$

Jei laužtinės linijos kraštinių skaičius be galio dvejėja, tai a artėja spinduliu R , o s_1 ir s jų bendrai ribai — rutulio paviršiu S ; vad.,

$$\begin{aligned} \lim(v_1 - v) &= \frac{1}{3} \lim(s_1 R - sa) = \frac{1}{3} (R \cdot \lim s_1 - \lim s \cdot \lim a) = \\ &= \frac{1}{3} (SR - SR) = 0. \end{aligned}$$

Todel, lygybė (1) virsta

$$V_1 - V = 0,$$

$$V_1 = V.$$

iš kur

Vad.,

$$V = \lim v = \lim v_1$$

$$(v_1 > V > v).$$



Taigi, abiejų daugiasienių tūriai turi tą pačią ribą, kurią vadina rutulio tūriu.

Pats rutulio tūris dabar surasti nesunku. Būtent,

$$V = \lim v = \lim \left(\frac{1}{3} sa \right) = \frac{1}{3} \lim s \cdot \lim a = \frac{1}{3} \cdot 4\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

§ 15. Santykio $\frac{\sin x}{x}$ riba, kai x artėja nuliui.

Kintamajame santykje $\frac{\sin x}{x}$ pakeitę x jo riba 0, gausime neapibrėžtą reiškinį $\frac{0}{0}$. Todel, to santykio ribos tenka ieškoti kitokiu būdu.

Iš trigonometrijos žinome, kad

$$x - \sin x < \frac{x^3}{4}, \dots \dots \dots \quad (1)$$

kur x yra lankas, mažesnis už $\frac{\pi}{2}$ ir išreikštas radijanais. Padaliję abidvi nelygybės (1) dali iš x , gauname

$$1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{4}.$$

Kai x artėja nuliui, tai dešinioji šios nelygybės dalis yra taip pat begalinė mažybė. Vad., skirtumas tarp pastoviojo dydžio 1 ir kintamojo $\frac{\sin x}{x}$ yra begalinė mažybė. Tatai parodo, kad 1 yra $\frac{\sin x}{x}$ riba; del to, galime rašyti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \dots \dots \dots \quad (2)$$

Jeigu x artėtų nuliui, būdamas neigiamu, tai mūsų išvada nepasikeistų, nes

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}.$$

§ 16. Reiškinio $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ riba, kai n be galo didėja.

Išnagrinėsime tris galimus atsitikimus.

I. n yra teigiamas sveikas skaičius.

Keldami laipsniu iš Njutono binomo, turime

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \dots + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n} \cdot \frac{1}{n^n},$$

$$\text{iš kur } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \\ + \dots \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \dots \dots \dots \quad (1)$$

Sumą, stovinčią dešinėje lygibės (1) dalyje, padidinkime dviem būdais: 1) visus daugiklius, stovinčius skliausteliuose, paverskime vienetais ir 2) daugikliuose pavidalo $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots}$ visur pastatykime 2 vietoje skaičių 3, 4, ..., n . Dele viso to, gausime tokią nelygybę:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \dots \dots \quad (2)$$

Dešiniojoje šios nelygybės dalyje eilė, kuri prasideda trečiuoju nariu, yra geometrinės progresijos narių suma. Tos sumos didumą rasime, taikindami atitinkamą algebro formulą, būtent:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Atsižiūrint į tai, nelygybei (2) galima duoti pavidas

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ arba } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\text{arba } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \dots \dots \dots \quad (3)$$

Eilė (1) rodo, kad, be galo didėjant n , reiškinio $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ reikšmė didėja, bet, kaip matyti iš nelygybės (3), visumet lieka mažesnė už 3; vad., reiškinys $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ turi ribą (§ 7, 1). Ši riba paprastai žymima raide e ; todėl, galime sakyti, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \dots \dots \dots \quad (4)$$

Skaičius e yra neišmatuojamas; jis gali būti išskaičiuotas bet kuriuo pageidaujamu tikslumu. Skaičiaus e didumas, išskaičiuotas tikslumu lige penkių dešimtainių ženklių, yra $e=2,71828$.

II. n yra teigiamas trupmeninis skaičius.

Bet kurių n reikšmei rasis du sveiki skaičiu m ir $m+1$, tokiu, kad

$$m < n < m+1 \dots \dots \dots \quad (5)$$

Iš čia

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{n} > \frac{1}{m+1},$$

ir toliau

$$1 + \frac{1}{m} > 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{m+1}.$$

Vad.,

$$(1 + \frac{1}{m})^n > (1 + \frac{1}{n})^n > (1 + \frac{1}{m+1})^n \dots \dots \quad (6)$$

Bet $m+1 > n$, vad.,

$$(1 + \frac{1}{m})^{m+1} > (1 + \frac{1}{n})^n,$$

ir taip pat $m < n$, vad.,

$$(1 + \frac{1}{n})^n > (1 + \frac{1}{m+1})^m.$$

Todel, nelygybės (6) galima pakeisti tokiomis:

$$(1 + \frac{1}{m})^{m+1} > (1 + \frac{1}{n})^n > (1 + \frac{1}{m+1})^m \dots \dots \quad (7)$$

Jeigu dabar n be galo didės, tai, einant nelygybe $m+1 > n$, be galo didės ir sveikasis teigiamasis skaičius m . Del to, kraštinių nelygybių (7) nariai artėja ribai e . Iš tikrujų,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{m})^{m+1} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[(1 + \frac{1}{m})^m \cdot (1 + \frac{1}{m}) \right] = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{m})^m \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{m}) = e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ir } \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{m+1})^m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[(1 + \frac{1}{m+1})^{m+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{m+1}} \right] = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{m+1})^{m+1} \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{m+1}} = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Aiškū, del to, kad ir vidurinis tų nelygybių narys, reiškinys $(1 + \frac{1}{n})^n$, negali artėti kitai ribai, kaip tik e , t. y.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e.$$

III. n yra neigiamas skaičius.

Sakykime, $n = -p$, kur $p > 0$.

Turime

$$\begin{aligned} (1 + \frac{1}{n})^n &= (1 - \frac{1}{p})^{-p} = (\frac{p-1}{p})^{-p} = \frac{1}{(\frac{p-1}{p})^p} = (\frac{p}{p-1})^p = \\ &= (1 + \frac{1}{p-1})^p = (1 + \frac{1}{p-1})^{p-1} \cdot (1 + \frac{1}{p-1}). \end{aligned}$$

Kai n be galo didės, tai be galo didės ir teigiamasis skaičius p . Del to, pereidami prie ribų, gauname

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{p \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{p-1})^{p-1} \cdot \lim_{p \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{p-1}) = e \cdot 1 = e.$$

§ 17. Naturaliniai logaritmai. Pérējimas nuo vienos logaritmų sistemos prie kitos.

Rastasis pereitame § 16 skaičius e yra imamas vadinamų naturalinių, arba neperinių, logaritmų sistemos pagrindu, ir, del to, jį dažnai vadina naturalinių (arba neperinių) logaritmų pagrindu.

Nesunku išvesti sąryšis, kuris yra tarp to paties skaičiaus logaritmų, paimtų įvairiais pagrindais. Tegu turime to paties skaičiaus N logaritmus įvairiais pagrindais; tegu x yra skaičiaus N logaritmas pagrindu a , o x_1 yra to paties skaičiaus N logaritmas pagrindu b . t. y., tegu

$$N = a^x \dots \dots \dots \quad (1)$$

$$\text{ir } N = b^{x_1} \dots \dots \dots \quad (2)$$

Logaritmuodami lygybę (2) pagrindu a , gauname

$$\lg_a N = x_1 \lg_a b,$$

arba, atmindami, kad, einant lygybe (1), $\lg_a N = x$,

$$x = x_1 \lg_a b, \dots \dots \dots \quad (3)$$

iš kur

$$x_1 = x \cdot \frac{1}{\lg_a b}.$$

Pažymėję pastovųjį daugiklį $\frac{1}{\lg_a b}$ raide M , t. y., padėjė

$$\frac{1}{\lg_a b} = M, \dots \quad (4)$$

gauname sėriši tarp dviejų sistemų logaritmų tokiam pavidale

$$x_1 = x \cdot M \dots \quad (5)$$

Vad., skaičių logaritmus pagrindu b galime gauti iš tų pačių skaičių atitinkamų logaritmų pagrindu a , jei pastaruosius logaritmus padauginsime iš to paties skaičiaus M . Daugiklis M yra vadinamas naujosios sistemos (pagrindu b) logaritmų moduliu senųjų logaritmų atžvilgiu. Kaip matome iš lygybės (3), jis yra lygus vienetui, padalytam iš naujojo pagrindo b (prie kurio per einame) logaritmo, paimto senuoju pagrindu a (nuo kurio per einame).

Del to, turint, pav., tabelės logaritmų pagrindu 10, lengva sudaryti tabelės pagrindu, pav., 5. Tam reikia tik iš turimųjų tabelių rasti logaritmas 5, padalyti iš jo 1 ir padauginti visi turimieji logaritmai iš dalmens $\frac{1}{\lg_{10} 5}$. Per tatai jie pavirs tų pačių skaičių logaritmai pagrindu 5.

Darydami taip, kaip ką tik pasakyta, rasime, pav.,

$$\lg_5 2 = \lg_{10} 2 \cdot M = \lg_{10} 2 \cdot \frac{1}{\lg_{10} 5} = \frac{0,30103}{0,69897} = 0,43068.$$

Pastebėsime, kad moduliu M galima duoti kitas pavidalas. Iš tiesų, logaritmuodami lygybę (1) pagrindu b , gauname

$$\lg_b N = x \lg_b a,$$

arba

$$x_1 = x \lg_b a \dots \quad (6)$$

Sudauginę panariui lygybes (3) ir (6) ir sutrumpinę, guuname

$$1 = \lg_a b \cdot \lg_b a, \dots \quad (7)$$

iš kur

$$\frac{1}{\lg_a b} = \lg_b a,$$

t. y.,

$$M = \frac{1}{\lg_a b} = \lg_b a \dots \quad (8)$$

Modulis $M = \frac{1}{\lg_e 10}$, iš kurio turime dauginti naturalinius logaritmus, kad gautumėme logaritmus pagrindu 10 (brigginius), yra

$$M = \frac{1}{\lg_e 10} = 0,43429.$$

Modulis $M_1 = \frac{1}{\lg_{10} e}$, iš kurio turime dauginti logaritmus pagrindu 10 (brigginius), kad gautumėme naturalinius logaritmus, yra

$$M_1 = \frac{1}{\lg_{10} e} = 2,30259.$$

§ 18. Pavyzdžiai.

1. Rasti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.
2. Rasti $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{a}{x} \right)$.
3. Rasti $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} ax)$.
4. Rasti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.
5. Rasti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x + \operatorname{tg} x}$.
6. Rasti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$.
7. Įrodyti, kad, jei stačiojo prie taško A trikampio ABC viršūnė B tolsta begalybėn statinio AB kryptimi, tai skirtumas tarp ižambinės CB ir statinio AB artėja nuliui.
8. Duotas lygiašonis trikampis ABC su pagrindine $AB=c$. Lygiagrečiai su pagrindine nutiesta tiesioji, kuri perkerta šoną BC taške D , ir kurios nutolimas nuo pagrindinės lygus d . Rasti tiesiosios AD ribos ilgumas, jei viršūnė C , slinkdama pagrindinės statmeniu, tolsta begalybėn.

II. Apie funkcijas.

§ 19. Argumentas ir funkcija.

Jeigu kuriu nors du kintamuojų dydžiu taip pareina vienas nuo kito, kad bet kuriam vieno didumui atitinka tam tikras (vienas ar keli) kito didumas, tai pirmąjį vadina antrojo argumentu, o antrąjį — pirmojo funkcija.

Taip, pav., skritulio plotas yra jo spindulio funkcija, dėl to kad, kintant spindulio didumui, kinta nuo to ir skritulio plotas; spindulio gi didumą laiko argumentu.

Taip pat rutulio tūris yra jo spindulio funkcija. Duotojo apskritimo stygos ilgumas yra jos nuotolio nuo centro funkcija, ir kit.

Katras iš kintamųjų dydžių, pareinančių vienas nuo kito, reikia laikyti argumentu ir katras funkcija, priklauso nuo pastatytojo klausimo esmės. Taip, pav., į skritulio plotą mes aukščiau žiūrėjome, kaip į jo spindulio funkciją, bet, atvirkščiai, ir spindulys gali būti skritulio ploto funkcija, nes, kintant skritulio plotui, turi kisti nuo to ir jo spindulys.

Jeigu pirmajame pavyzdje skritulio plotą pavadinsime y , o jo spindulio ilgumą x , tai sakyti tarp funkcijos ir argumento galime išreikšti šia lygybe:

$$y = \pi x^2.$$

Taip pat ir antrajame pavyzdje rutulio tūri pavadinę y , o jo spindulio ilgumą x , galime išreikšti sakyti tarp funkcijos ir argumento šia lygybe:

$$y = \frac{4}{3} \pi x^3.$$

Taip pat ir trečiajame pavyzdje galime išreikšti sakyti tarp funkcijos ir argumento lygybe

$$y = 2\sqrt{r^2 - x^2},$$

kurioje stygos ilgumas pažymėtas y , jos nuotolis nuo centro x , o pastovusis spindulys r .

Apibendrinami gautuosius rezultatus, matome, jog kiekviename formula, kuri yra kuriu nors veiksmų su kintamuojų padarinys, duoda mums to kintamojo funkciją Pav., $y = 5x^3$, $y = \operatorname{tg} 2x$, $y = \sqrt{x+3}$ yra argumento x funkcijos.

Jeigu norima išreikšti, kad y yra kai kuri x funkcija, tai vartojama šioks pažymėjimas:

$$y = f(x),$$

kurs reikia skaityti taip: „ y yra x -o funkcija“. Kitam kuriam nors funkciniams sąryšiui pažymeti vartojama kiti pačiūs simboliai: $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_1(x)$, $F_1(x)$ ir kit. Pav., jei $f(x) = 5x + 2$, tai funkcija $\sqrt{3x} - \cos x$ nebegalima tame pačiame klausime žymėti $f(x)$, o tenka griebtis žymėjimo $F(x)$, ar $\varphi(x)$, ar kit.

Lig šiol, kalbėdami apie funkcijas, turėjome galvoje tokias funkcijas, kurios pareina nuo vieno argumento. Jas ir vadina vieno argumento funkcijomis. Lengva išsivaizduoti tokius dydžius, kurių kitimas pareina ne nuo vieno dydžio kitimo, bet nuo dviejų, trijų ir, apskritai, daugelio. Taip, pav., stačiakampio plotas yra jo pločio ir ilgio funkcija; taisyklingojo daugiakampio plotas yra jo kraštinių ilgio ir jų skaičiaus funkcija, ir kit. Tokios funkcijas vadina dviejų, trijų ir, apskritai, daugelio argumentų funkcijomis. Jos žymimos panašiai, kaip ir vieno argumento funkcijos: $z = f(x, y)$, $u = F(x, y, z)$ ir kit.

§ 20. Atskirosios funkcijų reikšmės.

Jei funkcijos argumentui x duosime kai kurią atskirą reikšmę, pav., $x = a$, tai gausime atitinkamą funkcijos $f(x)$ reikšmę. Tokios reikšmės vadinasi atskiros funkcijų reikšmės. Jos žymimos simboliu $f(a)$, arba kai kada ir $[f(x)]_{x=a}$. Pav., jei $f(x) = -3x^2 + 2x - 5$, tai $f(2) = -3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 5 = -3 \cdot 4 + 4 - 5 = -11$, $f(-5) = -3(-5)^2 + 2(-5) - 5 = -3 \cdot 25 + 10 - 5 = -60$, $f(0) = -5$.

Šit dar pavyzdžiai.

$$\begin{aligned} 1) \quad & f(x) = x^2 - 2x + 1; \text{ rasti } f(1+k) \text{ ir } f(x+h) - f(h). \\ & f(1+k) = (1+k)^2 - 2(1+k) + 1 = 1 + 2k + k^2 - 2 - 2k + 1 = k^2; \\ & f(x+h) = (x+h)^2 - 2(x+h) + 1 = x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h + 1; \\ & f(h) = h^2 - 2h + 1; \\ & f(x+h) - f(h) = x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h + 1 - h^2 + 2h - 1 = x^2 + 2xh - 2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & f(x) = 2x^3 + x^2 - 3; \quad \varphi(x) = x^2; \text{ rasti } f[\varphi(x)] \text{ ir } \varphi[f(x)]. \\ & f[\varphi(x)] = 2(x^2)^3 + (x^2)^2 - 3 = 2x^6 + x^4 - 3; \quad \varphi[f(x)] = (2x^3 + x^2 - 3)^2. \end{aligned}$$

§ 21. Funkcijų lytys.

Apskritai, funkcijų yra didelis įvairumas. Norėdami lygtis vieną su kita, skirsto jas lytimis. Lytys pareina nuo to, kuo

riuo atžvilgiu funkcijos yra palyginamos arba atskiriamos viena nuo kitos. Turėdami toliau galvoje vieno argumento funkcijas, nurodysime šias svarbesnes funkcijų lytis.

I. Funkcijos išreikštinės ir neišreikštinės.

Funkcija vadinasi išreikštinė, jeigu stačiai nurodyta, kuriuos veiksmus turime nuveikti su argumentu, kad gautumėme funkciją. Funkcija vadinasi neišreikštinė, jei savybės jos su argumentu duotas lygtimi, kurias dar reikia išspręsti, kad gautumėme funkcijos reiškinį. Pavyzdžiuose $y=5x^2+\sqrt{x}$ ir $x^2-ay=1$ pirmajame y yra išreikštinė x-o funkcija, o antrajame y yra neišreikštinė x-o funkcija.

Pastebėjimas. Iš pasakytojo aišku, jog, norint neišreikštinė funkcija padaryti išreikštine, reikia išspręsti tos lygtys, kurios riša ją su argumentu. Pav., išsprendę aukščiau duotąjį neišreikštinę funkciją, gauname jos išreikštinį reiškinį $y=\frac{x^2-1}{a}$.

II. Funkcijos tiesioginės ir atvirkštinės.

Apskritai, vieną kitai atvirkštinėmis funkcijomis vadiname bet kuriuodu kintamuoju dydžiu, surištu vienomis lygtimis. Viename tų dydžių vadinasi tiesioginė funkcija, o kitas — atvirkštinė. Imkime, pav., lygtis $ax+by+c=0$; išsprendę jas vieną sykį x-ui, o kitą y-ui, gausime dvi viena kitai atvirkštinės funkcijas

$$x=-\frac{by+c}{a} \text{ ir } y=-\frac{ax+c}{b}.$$

III. Funkcijos vienareikšmės ir daugiareikšmės.

Funkcija vadinasi vienareikšmė, jeigu kiekvienam argumento didumui teatitinka tik vienas funkcijos didumas. Tokios yra, pav., funkcijos

$$y=x^3, y=\frac{x^2}{x+2}, y=\lg x.$$

Funkcija vadinasi daugiareikšmė, jeigu kiekvienam argumento didumui atitinka du arba daugiau funkcijos didumus. Tokios yra, pav., funkcijos

$$y=\pm\sqrt{x}, y=\arccos x.$$

IV. Funkcijos algebrinės ir transcendentinės.

Išreikštinė funkcija vadinasi algebrinė, jei ją galime gauti, nuveikę su jos argumentu baigtinių algebrinių veiksmų skaičių.

Algebriniu veiksmu čia eina sudėtis, atimtis, daugyba, dalyba, kėlimas laipsniu ir traukimas šaknies, kai laipsnių ir šaknių rodikliai yra žinomi, realiniai ir išmatuojami. Tokios yra, pav., funkcijos

$$y=ax^2+bx+c, y=\sqrt[3]{ax+b}, y=\frac{5}{2+x^n}.$$

Neišreikštinė funkcija y, nustatoma lygtimis $f(x, y)=0$, vadinasi algebrinė, jei $f(x, y)$ turi baigtinių skaičių algebrinių veiksmų su kintamaisiais x ir y.

Išreikštinės algebrinės funkcijos dalijasi į dvi dalis: 1) racionalinės ir 2) irracionalinės. Jei algebrinės funkcijos reiškinyje argumentas yra po radikalo ženklu, tai tokia funkcija vadinasi irracionalinė. Visos kitos algebrinės funkcijos vadinasi racionalinės. Pav., $y=\sqrt{a+x}-b$ yra irracionalinė funkcija, o $y=5ax^3-x\sqrt{2}+1$ yra racionalinė funkcija.

Racionalinės funkcijos savo ruožtu dalijasi į sveikas ir trupmenines. Jeigu racionalinės funkcijos reiškinyje argumentas jeina į funkcijos vardiklį, tai tokia funkcija vadinasi trupmeninė, kitais atvejais — sveikoji. Pav., funkcija $y=\frac{x^2-1}{x^2+2}+5x$ yra trupmeninė, o funkcija $y=4x^3-\frac{2}{5}x+3$ yra sveikoji.

Bet kuri nealgebrinė funkcija vadinasi transcendentinė. Šioms priklauso:

- a) rodiklinė funkcija $y=a^x$,
- b) logaritminė funkcija $y=\lg x$,
- c) visos trigonometrinės tiesioginės funkcijos, pav., $y=\sin x$,
- č) visos trigonometrinės atvirkštinės funkcijos, pav., $y=\arcsin x$,

ir kit.

§ 22. Funkcijų netrukumas.

Jeigu kintamasis dydis, bekisdamas, pereina nuo vienos kuriros nors savo reikšmės (pradinės) prie kitos (galutinės), eidamas per visas realines reikšmes tarp pradinės ir galutinės, tai sako, jog toks dydis kinta nurodytose ribose netrukiai. Kitaip kalbant, netrukus kitimas bus tada, kada skirtumas tarp dviejų gretutinių dydžio reikšmių yra be galio mažas. Jei, pav., pasakyse, jog x kinta netrukiai tarpe (2,5), tai tai reiškia, kad x

perbėga visas realines reikšmes tarp 2 ir 5, neišskiriant nei šiu pastarųjų (jei del tą ribą neduota atskirų rezervų):

$$2; \dots; 2,001; \dots; 2,002; \dots; 2,012; \dots; 2,5; \dots; 3; \dots; \sqrt{10}; \dots; \\ 3\frac{7}{9}; \dots; 4,9; \dots; 5.$$

Kintamasis dydis gali kiteti ir tokiu būdu, kad jis gali turėti ne visas, bet tik kai kurias realines reikšmes. Toks kitimas bus trukus. Trukojo kitimo pavyzdžiu gali būti daugiakampio kraštinių skaičiaus kitimas, nes kraštinių skaičius tegali turėti sveikasias reikšmes 3, 4, 5, ...

Tyrinéjant funkcijas, argumentas paprastai yra laikomas duotajame tarpe (a, b) netrukiai kintamuoju dydžiu.

Jeigu argumentas, bekisdamas, pereina nuo reikšmės a prie reikšmės x , tai skirtumas $x-a=h$ vadinas argumento prieaugliu. Tada atitinkamų funkcijos reikšmių skirtumas $f(x)-f(a)$ vadinas funkcijos prieaugliu. Tieki argumento, tiek funkcijos prieauglius gali būti ir teigiamas ir neigiamas.

Funkcija $f(x)$ vadinas netruki argumento kitimo tarpe nuo $x=a$ iki $x=b$, jei ji tose ribose kiekvienai argumento reikšmei turi apibrėžtą reikšmę, ir jei be galo mažam argumento prieaugliui h atitinka ir be galo mažas funkcijos prieauglius $f(x+h)-f(x)$.

Funkcija $f(x)$ vadinas netruki $x=a$, jei $f(a)$ yra apibrėžtos reikšmės, ir jei be galo mažam argumento prieaugliui h atitinka taip pat be galo mažas funkcijos prieauglius $f(a+h)-f(a)$.

Imkime pavyzdžius.

$$1) f(x)=mx+n.$$

Sudarę skirtumą $f(x+h)-f(x)$, gauname

$$m(x+h)+n-mx-n=mh.$$

Kadangi tas skirtumas, t. y., mh , artėja nuliui vienkart su h ir kadangi, be to, duotoji funkcija turi apibrėžtas reikšmes bet kurių x -o reikšmei, tai vedame, kad ji yra netrukioji funkcija visoms argumento reikšmėms.

$$2) f(x)=\sin x.$$

Sudarę skirtumą $f(x+h)-f(x)$, gauname

$$\sin(x+h)-\sin x=2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Šitas skirtumas, artėjant h nuliui, taip pat artėja nuliui, nes kosinusas visumet turi baigtinę reikšmę, vis tiek koks yra x -o di-

dumas. Kadangi pati funkcija, be to, turi apibrėžtas reikšmes bet kuriai x -o reikšmei, tai vedame, kad ji yra netrukioji funkcija visoms argumento reikšmėms.

Jeigu kokiai nors atskirai argumento x reikšmei a funkcijos reikšmė $f(a)$ yra neapibrėžta arba jeigu skirtumas $f(a+h)-f(a)$, be galio artėjant h nuliui, nėra begalinė mažybė, tad funkcija tai x -o reikšmei trūksta, arba, kaip sakoma, funkcijos netrukumas gauna trūkį.

Pav., funkcija $f(x)=\frac{7}{x-3}$ gauna trūkį, kai $x=3$, nes tai x -o reikšmei ji nustoja prasmės, virsdama reiškiniu $\frac{7}{0}$. Šiaip gi, visoms kitoms x reikšmėms ši funkcija yra netruki, kas matyti iš skirtumo sąstato

$$f(x+h)-f(x)=\frac{7}{x+h-3}-\frac{7}{x-3}=-\frac{7h}{(x-3)(x+h-3)}.$$

Pažiūrėkime dar, kaip kinta duotoji funkcija trūkio artumeje. Kadangi, esant ϵ be galio mažam,

$$f(3-\epsilon)=-\infty,$$

$$f(3+\epsilon)=+\infty,$$

tai, vadinas, einant x -ui nuo $3-\epsilon$ prie $3+\epsilon$, t. y., pakitéjus x -ui be galio mažu skaičiumi 2ϵ , funkcija padarė be galio didelį šuoli nuo $-\infty$ į $+\infty$.

Kitu pavyzdžiu funkcijos, gaunančios trūkius, gali būti $y=\operatorname{tg} x$. Iš trigonometrijos žinome, kad ši funkcija trūksta, kai $x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ ir, apskritai, $\frac{(2k+1)\pi}{2}$.

§ 23. Pagrindinės netrukiosios funkcijos ypatybės.

Theorema I. Jeigu funkcija $f(x)$ yra netruki visoms argumento x reikšmėms tarp kurių nors dviejų skaičių a ir b , ir ieigu funkcijos kraštinių reikšmės $f(a)$ ir $f(b)$ yra priešingų ženklų, tai tarp a ir b rasis bent viena reikšmę c , kuriai funkcija virsta nuliumi, t. y., $f(c)=0$.

Iš tikrujų, kadangi, duotaja sąlyga, funkcija $f(x)$ yra netruki, kintant x -ui nuo a iki b , tad, pereidama nuo vienos savo kraštinių reikšmės $f(a)$ prie kitos $f(b)$, ji turi pereiti per visas reikšmes tarp $f(a)$ ir $f(b)$; bet kadangi, duotaja sąlyga, $f(a)$ ir $f(b)$ yra priešingų ženklų, t. y., viena jų dviejų yra teigiamą, o kita neigiamą, tai, vad., $f(x)$ iš tikrujų turi, bekisdama, pereiti

per reikšmę, lygią nuliui. Taigi, turi būti tarp a ir b tokia reikšmė c , kuriai $f(c)=0$, kas ir reikėjo įrodyti.

Pav., $f(x)=3x^2-5x-2$; $f(1)=-4$; $f(3)=10$; vad., $f(x)$ turi virsti nuliumi kai kuriai x reikšmei tarp 1 ir 3. Ir tikrai, $f(2)=0$.

T e o r e m a II. Jeigu netruki kai kuriam teisina (a, b) funkcija $f(x)$ turi to tarpo galuose nelygias reikšmes $f(a)$ ir $f(b)$, t^r jeigu kai kuris dydis A randasi tarp $f(a)$ ir $f(b)$, tai turi būti tarp a ir b bent viena tokia reikšmė c , kuriai funkcija turi gauti reikšmę A , t. y., $f(c)=A$.

Sudarykime funkciją

$$F(x)=f(x)-A.$$

Ji, aisku, bus netruki tame pačiam argumento tarpe, kaip ir funkcija $f(x)$. Be to,

$$F(a)=f(a)-A$$

ir

$$F(b)=f(b)-A$$

bus priešingų ženklų, nes A , duotaja sąlyga, randasi tarp $f(a)$ ir $f(b)$. Bet tokiu atveju, einant teorema I, kai kuriai argumento reikšmei c tarp a ir b funkcija $F(x)$ turi virsti nuliumi, ir mes gauname

$$\begin{aligned} F(c) &= f(c)-A=0, \\ \text{iš kur } & \\ F(c) &= A. \end{aligned}$$

Teorema įrodyta.

§ 24. Funkcija a^x .

Susipažinsime arčiau su funkcija a^x , kuri vadinasi rodiklinė. Pastovusis skaičius a , nelygus vienetui, vadinasi rodiklinės funkcijos pagrindas, o kintamasis x — jos rodiklis. Rodiklinių funkcijų skaičiuje yra, pav., funkcija e^x , kur e yra naturalinių logaritmų pagrindas.

Tegu a yra teigiamas skaičius.

T e o r e m a. Riba $a^x=1$, kai $x=0$.

I. $a>1$ ir $x>0$.

Įrodysime, kad $a^x-1<\varepsilon$, kur ε yra be galio mažas skaičius.

Tegu x , bemažėdamas, pasidaro mažesnis už $\frac{1}{n}$, kur n yra kai kuris sveikasis teigiamasis skaičius, t. y., tegu turime $0<x<\frac{1}{n}$. Tuomet $a^x<a^{\frac{1}{n}}$. Atėmę iš abiejų šios nelygibės dalių po vieneta, gausime

$$a^x-1<a^{\frac{1}{n}}-1.$$

Įrodyti, jog $a^x-1<\varepsilon$, gana radus toks n , kuriam būtų teisinga nelygybė

$$a^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon, \dots \dots \dots \quad (1)$$

t. y., kad būtų teisinga nelygybė

$$a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon, \text{ arba } a<(1+\varepsilon)^n \dots \dots \dots \quad (2)$$

Bet, Njutono binomu, turime

$$(1+\varepsilon)^n=1+n\varepsilon+\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \varepsilon^2+\dots+\varepsilon^n,$$

iš kur, atmetę dešiniojoje pusėje visus narius, pradėdami nuo trečiojo (jie visi yra teigiami), gauname nelygybę

$$(1+\varepsilon)^n>1+n\varepsilon \dots \dots \dots \quad (3)$$

Vad., nelygybė (2) bus teisinga, jei bus teisinga nelygybė

$$a<1+n\varepsilon,$$

t. y., jei bus

$$n>\frac{a-1}{\varepsilon}.$$

Kadangi $x<\frac{1}{n}$, tai pastaroji sąlyga yra tolygi sąlygai

$$x<\frac{\varepsilon}{a-1}.$$

Taigi, visoms x reikšmėms, gulinčioms tarp 0 ir $\frac{\varepsilon}{a-1}$, turėsime, kad

$$a^x-1<\varepsilon,$$

o tatai reiškia, kad

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1. \dots \dots \dots \quad (4)$$

II. $a>1$, $x<0$.

Pažymėjė $x=-y$, kur $y>0$, gauname

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = \lim_{y \rightarrow 0} a^{-y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{a^y} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} a^y} = \frac{1}{1} = 1.$$

III. $a<1$.

Sakysime, $a=\frac{1}{b}$, kur $b>1$. Tuomet

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{b}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} b^x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Parodysime dar, kad rodiklinė funkcija yra funkcija netruki.

Tegu turime rodyklinę funkciją $f(x)=a^x$. Davę x -ui prieauglių h ir sudarę atitinkamą funkcijos priauglių, gauname

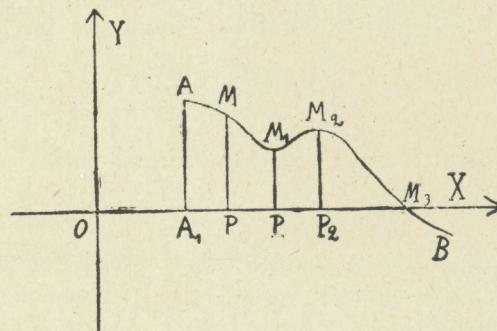
$$f(x+h)-f(x)=a^{x+h}-a^x=a^x(a^h-1).$$

Kai h artėja nuliui, tai a^h artėja vienetui [lyg.(4)], skirtumas a^h-1 artėja nuliui, ir visa dešinioji pastarosios lygybės pusė taip pat artėja nuliui; vad., ir funkcijos priauglius $a^{x+h}-a^x$ taip pat yra be galio mažas. Kadangi, be to, pati funkcija a^x turi apibrėžtas reikšmes visoms argumento reikšmėms, tai galime sakyti, kad ji yra netruki funkcija visoms x -o reikšmėms tarp $-\infty$ ir $+\infty$.

§ 25. Geometrinis funkcijų vaizdavimas.

Tegu turime funkciją $y=f(x)$.

Įsivaizduokime ortogonalinę koordinatų sistemą XOY (1 brėž.). Žiūrėsime į duotosios funkcijos argumento reikšmes, kaip į plokš-



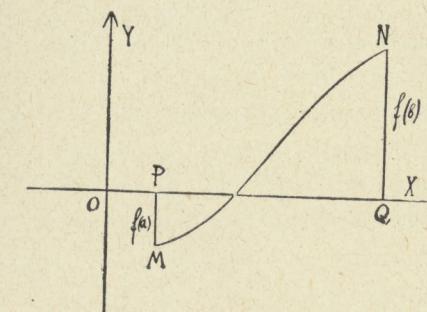
1 brėž.

tumos taškų abscisas, o į atitinkamas funkcijos reikšmes, kaip į tų taškų ordinatas. Tada kiekvienos poros x ir y reikšmių, atitinkamai gautų iš funkcijos lygčių, geometrinis vaizdas bus kai kuris taškas M . Geometrinė vieta tokiai taškai M , kurių koordinatos patenkina duotosios funkcijos lygtis $y=f(x)$, yra kai kuria linija AB . Ta linija AB ir yra geometrinis duotosios funkcijos $y=f(x)$ vaizdas. Lygtys, nustatančios funkciją, t. y., lygtys $y=f(x)$, vadinasi linijos AB lygtimis.

Jei duotoji funkcija $f(x)$ yra netruki, tai ir vaizduojanti ją linija AB yra netruki, ir priešingai.

Linija AB vaizdžiai parodo nagrinėjamosios funkcijos kitimo eigą. Iš tikrujų, mes matome, kad tarpe nuo A iki M_1 ji leidžiasi žemyn, t. y., jos taškų ordinatos darosi mažesnės; vad., tame tarpe, t. y., kai argumentas didėja nuo $x=OA_1$ iki $x=OP_1$, funkcija mažėja. Nuo M_1 iki M_2 linija kilsta į viršų. Tatai reiskia, kad jos taškų ordinatos didėja; vad., tame tarpe, t. y., kai argumentas didėja nuo $x=OP_1$ iki $x=OP_2$, funkcija taip pat didėja. Taške M_2 linija nusileidžia žemiau, o taške M_3 ji iškilsta aukšciau, nekaip visuose kituose gretutiniuose taškuose. Vad., tose vietose, t. y., kai argumentas x yra atitinkamai lygus OP_1 ir OP_2 , funkcija turi atitinkamai mažiausią ir didžiausią reikšmę iš visų joins gretutinių reikšmių. Taške M_3 linija AB perkerta abscisu aši, t. y., tame taške funkcijos reikšmė yra lygi nuliui; šiuo atveju atkarpa OM_3 bus ta x -o reikšmė, kuriai lygtys $f(x)=0$ virsta tapatybe, t. y., atkarpos OM_3 didumas duoda lygčių $f(x)=0$ šaknį.

Geometriškai vaizduojant funkcijas, § 23 išvestosios netrukiosios funkcijos ypatybės darosi ytin ryškios. Taip antai, teoremai I paaiškinti gali tiki 2 brėžinys, ir pati teorema geomet-



2 brėž.

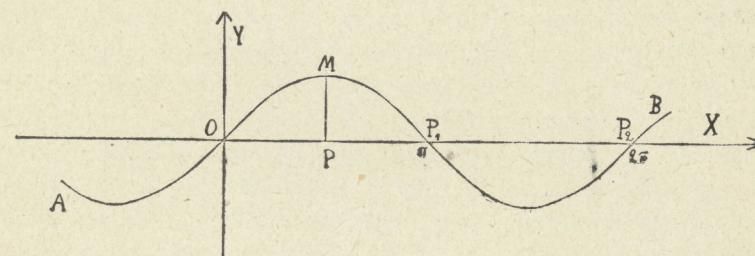
riškai galima taip nusakyti: jeigu netrukiosios linijos taškai M ir N , kurių abscisos yra $x=OP=a$ ir $x=OQ=b$, guli įvairiose abscisu ašies pusėse, tai linija perkerta abscisu aši kame nors tarp taškų $x=a$ ir $x=b$.

Antroji teorema geometriškai galima taip suformuluoti: jeigu netrukioji tarpe (a, b) linija turi nelygias ordinatas $f(a)$ ir $f(b)$, atitinkančias abscisoms $x=a$ ir $x=b$, ir jeigu A yra kai kuris dydis tarp $f(a)$ ir $f(b)$, tai minėtame tarpe rasis ir ordinata, lygi A .

Pav., išbrėšime kelias linijas, vaizduojančias kai kurias funkcijas.

I. $y = \sin x$.

Duodame argumentui x įvairias reikšmes: $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \pm k\pi$, kur k yra sveikasis skaičius. Visoms toms reikšmėms funkcija y gauna reikšmę 0, t. y., kreivoji toms argumento reikšmėms perkerta abscisu aši (3 brėž.). Kai x kinta nuo 0 iki

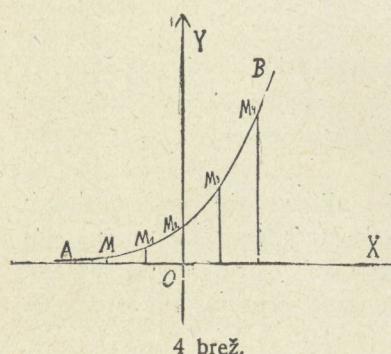


3 brėž.

$OP = \frac{1}{2}\pi$, tai y didėja nuo 0 iki $MP = 1$; x -ui toliau kintant nuo $OP = \frac{1}{2}\pi$ iki $OP_1 = \pi$, ordinatos reikšmės mažėja nuo $MP = 1$ iki 0. Toliau didėjant x -ui nuo $OP_1 = \pi$ iki $OP_2 = 2\pi$, ordinata y bus neigiamą ir savo absoliutiniu didumu kités ta pačia tvarka, kaip ir kintant x -ui ribose nuo 0 iki π . Tolesnis ordinatos y kitéjimas bus toks pat, kaip ir tarpe nuo $x=0$ iki $x=2\pi$, ir t. t.

Tuo būdu, brėžiamoji kreivoji turi bangų formą ir gali būti tėsiama į abidvi pusį iki begalybės. Ji vadinasi sinusoida. Vienodas kreivosios bangų kartojimosi atitinka funkcijos $\sin x$ periodiskumui.

II. $y = a^x$, kur $a > 1$.



Duodami x -ui įvairias atskirąs reikšmes ir surasdami atitinkamas y -o reikšmes, galime išbrėžti, kiek tik norime, ieškomomis kreivosios AB taškų M, M_1, M_2, \dots (4 brėž.).

Kai $x=0$, tai $y=OM_2=1$. Didėjant x -ui nuo 0 iki $+\infty$, funkcija y didėja nuo 1 iki $+\infty$, t. y., atitinkama kreivosios dalis M_2B , išėjusi iš taško M_2 , tolda-

ma nuo igrekų ašies į dešinę, tolės ir nuo iksų ašies. Mažėjant x ui nuo 0 iki $-\infty$, funkcija y mažėja nuo 1 iki 0, t. y., atitinkama kreivosios dalis M_2A , išėjusi iš taško M_2 , toldama nuo igrekų ašies į kairę, artinasi prie iksų ašies ir pasiekia ją tiktais begalybėje. Iksų ašis yra, tuo būdu, kreivosios AB asymptotė.

Išbrėžtooji kreivoji vadinasi logaritmika, nes jos lygtis $y=a^x$ galima duoti pavidalas $x=\lg_a y$.

Brėždami tą kreivą, émeme dëmesin tiktais teigiamasias funkcijos reikšmes, atmetę visas tas neigiamas reikšmes, kurias ji gali turėti, kai x yra trupmena.

§ 26. Pavyzdžiai.

1. $f(x)=3x-x^3-10x^4$. Rasti $f(0,4)$.
 2. $f(x)=\frac{4(x+2)}{5}+\frac{4x(2x-1)}{x^2-4}-\frac{x^2+16}{2x-1}$. Katra reikšmė yra didesnė: $f(3)$ ar $f(4)$?
 3. $f(x)=\frac{x^2+1}{4x-3}$. Rasti $f(+\infty)$.
 4. $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+1$. Rasti $f(-\infty)$.
 5. Rasti tos x -o reikšmės, kurioms gauna trūkį šios funkcijos:
- | | | |
|--|------------------------------------|-------------------------------|
| a) $\frac{4}{x+3}$ | b) $\frac{x^2+2}{x^2-5x+6}$ | c) $\operatorname{tg}(x-a)$. |
| 6. Išbrėžti linijos, kurių lygtys yra: | | |
| a) $x+y=0$ | b) $\frac{2x+y}{x+2y}=\frac{1}{5}$ | c) x^2+y^2+9 |
| č) $4x^2+9y^2=36$ | d) $y^2=4x$ | e) $y=\lg x$ |
| f) $y=\cos x$ | g) $y=\operatorname{tg} x$ | h) $y=\arcsin x$. |

III. Diferencialinė skaičiuotė.

§ 27. Išvestinė funkcija.

Tegu turime kurią nors netrukiają tarpe (a, b) x -o funkcija $y=f(x)$. Duokime x -ui kai kurį prieauglių h , teigiamą ar neigiamą. Tada funkcija pavirs $f(x+h)$; jos prieauglius bus $f(x+h)-f(x)$. Sudarykime funkcijos ir argumento prieauglių santykį

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

ir ieškokime to santykio ribos didumo, kai h artėja nuliui.

Kadangi, kaip sutarta, funkcija $f(x)$ yra netruki, tai skirtumas $f(x+h)-f(x)$, einant h į nulių, yra begalinė mažybė (§ 22). Tuo būdu, santykije (1) ir skaitiklis ir vardiklis, kai h artėja nuliui, paskyrium taip pat artėja nuliui; tačiau, pats santykis (1), paprastai, artėja kai kuriai ribai. Ta riba vadinas išvestinę funkcija.

Taigi, duotosios funkcijos išvestinė yra funkcijos ir jos argumento atitinkamų prieauglių santykio riba, kai argumento prieauglius artėja nuliui.

Išvestinė yra žymima ženklu $f'(x)$, arba y' , arba, jeigu yra tiesiog parašyta, kam yra lygi y , pav., $y = \frac{1+\sqrt{x}}{x}$, tai $\left(\frac{1+\sqrt{x}}{x}\right)'$. Vad.,

$$y' = f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \dots \dots \quad (2)$$

Be to, funkcijos prieauglius yra dažnai žymimas ženklu Δy , arba $\Delta f(x)$, o argumento prieauglius ženklu Δx , kuriuos skaito taip: „delta igrekas, delta ikso funkcija, delta iksas“. Simboliuose Δx , Δy , $\Delta f(x)$ Δ nėra daugiklis, bet yra tik ženklas, atstojas žodži „prieauglius“ ir, todėl, nuo antrosios raidės neatskiriama. Naujieji simboliai yra vartojami tam, kad, darant apskaitymus, būtų aiškiai matyti, kuriam kintamajam yra duotas prieauglius. Naujaisiais ženklais formulą (2) galime perrašyti taip:

$$\left. \begin{array}{l} y' = f'(x) = \lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \\ \text{arba} \quad y' = f'(x) = \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \\ \text{arba} \quad y' = f'(x) = \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}. \end{array} \right\} \quad \dots \dots \quad (3)$$

Išvestinė gali turėti savo išvestinę, kuri vadinasi antroji duotosios funkcijos išvestinė ir yra žymima y'' , arba $f''(x)$. Taip pat gali būti y''' , arba $f'''(x)$, ir t. t.

Pavyzdys. Duota funkcija $y=5x^2-3x+8$. Reikia surasti jos išvestinę y' .

Kadangi $f(x)=5x^2-3x+8$, tai

$f(x+h)=5(x+h)^2-3(x+h)+8=5x^2+10xh+5h^2-3x-3h+8$,
ir, vad.,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{5x^2+10xh+5h^2-3x-3h+8-5x^2+3x-8}{h} = \\ = 10x-3+5h.$$

Kadangi $\lim_{h=0}(10x-3+5h)=10x-3$, tai

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 10x-3.$$

Taigi, $y'=10x-3$.

Jeigu reiktų rasti antroji išvestinė, tai, pasielgę taip pat, kaip pirma, gautumėme

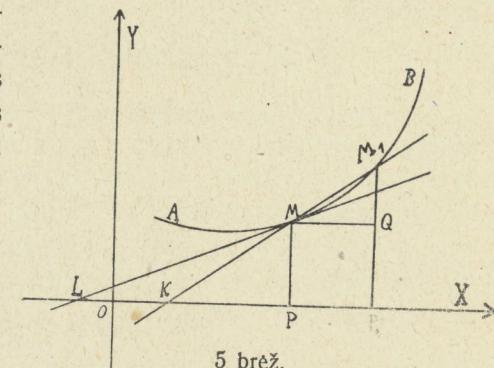
$$\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = 10,$$

$$\text{ir, vad.,} \quad \lim_{h=0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = 10.$$

Taigi, $y''=10$.

§ 28. Geometrinė išvestinės reikšmė

Tegu turime kai kurią funkciją $y=f(x)$. Jos geometrinis vaizdas, kaip žinome, yra kai kuri kreivoji AB (5 brėž.). Isivaizduokime ortogonalinę koordinatų sistemą ir paimkime kuri nors kreivosios tašką M su koordinatomis $OP=x$ ir $MP=y=f(x)$. Sakykime, x gauna kai kuri labai mažą prieauglių $PP_1=h$. Pakitėjus x -ui, pakitės ir y -ko reikšmė, ir nauja y -ko reikšmė bus $M_1P_1=f(x+h)$. Naujoms koordinatų reikšmėms atitinka kitas kreivosios taškas M_1 , kurį gausime, nutiesę iš taško P_1 tiesiąją, lygiagretę su igrekų ašimi, ligi susitinkant jai su kreivaja. Nubrėžę iš taško M tiesiąją MQ , lygiagretę su iksų ašimi,



5 brėž.

ligi susitinkant jai taške Q su ordinata M_1P_1 , rasime, kad ordinatos prieauglius bus

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = M_1P_1 - MP = M_1Q.$$

Išbrėžę per taškus M ir M_1 kreivosios kertamają M_1K , matome, kad santykis

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{M_1Q}{MQ} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

yra stačiojo $\triangle MM_1Q$ statinių santykis. Tas statinių santykis yra lygus $\operatorname{tg} \angle M_1MQ$, arba $\operatorname{tg} \angle M_1KX$, t. y., tangentui kampo, kurį kertamoji M_1K sudaro su iksu ašimi.

Kai h ims artėti nuliui, t. y., kai taškas P_1 ims artėti taškui P , taškas M_1 , slinkdamas kreivaja AB , artės taškui M ir, pagaliau, sutaps su juo, kai h pavirs nulium. Tuo metu kertamoji M_1K suksis apie tašką M ir, pagaliau, riboje (kai $h=0$) pavirs kreivosios liečiamają ML taške M . Kadangi visose paeilinėse taško M_1 padėtyse santykis (1) visumet reiškė kertamosios kampo su iksu ašimi tangentą, tai riboje (kai $h=0$) jis reiškia liečiamosios kampo su iksu ašimi tangentą. Todel, galime rašyti

$$y' = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \operatorname{tg} \angle MLX.$$

Iš analizinės geometrijos žinome, jog tiesiosios kampo su iksu ašimi tangentes vadinasi kampinis tiesiosios koeficientas. Taigi, funkcijos, vaizduojamos geometriškai kreivaja, išvestinė yra kampinis koeficientas liečiamosios, nutiestos per kreivosios tašką M , kurio abscisa lygi x .

§ 29. Mechaninė išvestinės reikšmė.

Tegu kurs nors taškas P slenka neribota tiesiaja. Tegu tas slinkimas yra toks, kad per x laiką jis (taškas P) nuėjo nuo kai kurio pastovaus taško A kelią, lygū $f(x)$.

Praėjus kai kuriam laikotarpiui h , taškas P bus nutolęs nuo A jau $f(x+h)$ ir, vad., nueis per tą laikotarpį kelią, lygū $f(x+h) - f(x)$. Jeigu taško P judeys būtų tolyginis, tai jo greitumas išsireikštų santykiu

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

Esant judeisiui netolyginiams, santykis (1) reiškia tik vadinamąjį vidutinį greitumą, t. y., tokį, kuriuo taškas, slenkas toly-

giniu greitumu, nueis kelią $f(x+h) - f(x)$ per tą patį laikotarpi h , kaip ir taškas P . Juo trumpesnis yra tas laikotarpis h , juo mažesnis yra judeisio netolygumas per tą laikotarpį ir juo daugiau santykio (1) reikšmė atitinka tikrajam greitumui. Del to, į santykio (1) ribą, kai h artėja nuliui, žiūrima, kaip į tikrąjį netolyginio judeisio greitumą.

Taigi, jei funkcija $f(x)$ reiškia taško tiesiaja linija nueitąjį kelią per x laiką, tai jos išvestinė

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

reiškia tuo taško greitumą tuo momentu, kai laikas yra lygus x .

§ 30. Funkcijos diferencialas.

Duota funkcija

$$y = f(x).$$

Jos išvestinė yra [§ 27, lygt. (3)]

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = y' = f'(x) \quad \dots \dots \dots \quad (a)$$

Jei prieauglius Δx darosi be galo mažas, tai jis yra žymimas ženklu dx ir vadintamas argumento x diferencialu.

Jei funkcija yra netruki, tai be galo mažam argumento prieaugliui Δx , t. y., dx , atitinka be galo mažas funkcijos prieauglius Δy , kuris yra žymimas dy ir vadintamas funkcijos diferencialu [kitokiais pažymėjimais bus $\Delta f(x)$ ir $df(x)$]. Simboliuose dx , dy , $df(x)$ ir pan. d nėra daugiklis, bet téra ženklas, ástojas žodži „diferencialas“.

Naudojantis naujaisiais ženklais, išvestinei (a) duodamas pavidalas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = y' = f'(x) \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

Formula (1) rodo, kad funkcijos išvestinė yra jos diferencialo santykis su argumento diferencialu.

Iš lygybés (1) lengvai gauname

$$dy = df(x) = y' dx = f'(x) dx, \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

t. y., funkcijos diferencialas yra lygus jos išvestinei, padauginai iš argumento diferencialo.

Lygybės (1) ir (2) rodo, kad funkcijos išvestinės suradimo uždavinys yra visai tolygus jos diferencialo suradimo uždavininiui. Jei mokėsime išspręsti vieną, tai išspręsime ir kitą.

Del to, ir diferencialo, ir išvestinės suradimą vadina funkcijos diferenciaciavimu.

§ 31. Pastoviosios tiekybės diferenciaciavimas.

Tegu turime

$$f(x)=c, \dots \quad (1)$$

kur c yra pastovi tiekybė.

Kadangi, kintant x -ui, c nekinta, tai

$$f(x+h)=c.$$

Todel,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = \frac{0}{h} = 0,$$

ir, vad.,

$$f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0,$$

t. y.,

$$c'=0 \dots \quad (2)$$

Taip pat ir

$$dc=c'dx=0 \cdot dx=0 \dots \quad (3)$$

Taigi, bet kurios pastoviosios tiekybės išvestinė ir, vad., diferencialas yra lygūs nuliui.

§ 32. Funkcijų sumos ir skirtumo diferenciaciavimas.

Tegu turime funkciją

$$y=z+u, \dots \quad (1),$$

kur z ir u yra dvi x -o funkcijos. Duosime x -ui prieauglių Δx . Tada ir funkcijos y , z ir u gaus atitinkamai prieauglius Δy ir Δu , t. y., turėsime

$$y+\Delta y=z+\Delta z+u+\Delta u \dots \quad (2)$$

Atimdami lygybę (1) iš lygybės (2) panariui, gauname

$$\Delta y=\Delta z+\Delta u.$$

Padaliję abidvi šios lygybės dali iš Δx , gausime

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta z}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Pereidami prie ribų, gauname

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta z}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

arba

$$y'=(z+u)'=z'+u', \dots \quad (3)$$

t. y., dviejų funkcijų sumos išvestinė yra lygi tų pačių funkcijų išvestinių sumai.

Ši teorema tokiu pat būdu nesunku įrodyti ir bet kuriam baigtiniams dėmenų skaičiui.

Padauginę abidvi lygybės (3) dali iš dx , randame

$$y'dx=(z+u)'dx=z'dx+u'dx,$$

arba

$$dy=d(z+u)=dz+du \dots \quad (4)$$

t. y., dviejų (arba kelių) funkcijų sumos diferencialas yra lygus tų pačių funkcijų diferencialų sumai.

Panašiu keliu lengvai rasime, kad dviejų funkcijų skirtumo išvestinė ar diferencialas yra atitinkamai lygūs tų pačių funkcijų išvestinių ar diferencialų skirtumui, t. y.,

$$y'=(z-u)'=z'-u', \dots \quad (5)$$

$$dy=d(z-u)=dz-du \dots \quad (6)$$

Pastebėjimas. Jeigu lygybėje (1) viena funkcija, pav., u , virsta pastovia tiekybe c , tai, eidami formula (3), gauname $(z+c)'=z'$, $(z+c)=z+c$, t. y., $dy=d(z+c)=dz+dc=dz$. Atėmę panariui iš lyg. (2) lygybę (1), gauname $\Delta y=\Delta z+\Delta u$.

§ 33. Funkcijų sandaugos diferenciaciavimas.

Sakysime, duota dviejų funkcijų sandauga, t. y., duota

$$y=zu, \dots \quad (1)$$

kur z ir u yra x funkcijos. Duodame argumentui x prieauglių Δx . Tada ir jo funkcijos y , z ir u gaus atitinkamai prieauglius Δy , Δz ir Δu . Turime

$$y+\Delta y=(z+\Delta z)(u+\Delta u)=zu+u\Delta z+z\Delta u+\Delta z \cdot \Delta u \dots \quad (2)$$

Atėmę panariui iš lyg. (2) lygybę (1), gauname

$$\Delta y=z\Delta u+u\Delta z+\Delta z \cdot \Delta u.$$

Padaliję abidvi pastarosios lygybės dali iš Δx , randame

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=z \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}+u \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}+\Delta z \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Pagaliau, pereidami prie ribos (kai $\Delta x=0$), gauname

$$y' = zu' + uz' + z' \cdot \lim_{\Delta x=0} \Delta u;$$

bet priauglius Δu riboje taip pat virsta nulium; todel, ir sandauga $z \cdot \lim_{\Delta x=0} \Delta u$ riboje yra lygi nuliui, ir, vad., vietoje pastarosios lygybės randame

$$y' = (zu)' = zu' + uz' \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

Jeigu būtų duota sandauga trijų ar daugiau funkcijų, tai jos išvestinę surasti galime šiaip.

Tegu, pav.,

$$y = zuv \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

Pažymėję $zu=t$, turime

$$y = tv;$$

del to,

$$y' = tv' + vt';$$

bet

$$t = zu \text{ ir } t' = zu' + uz',$$

vad.,

$$y' = (zuv)' = zuv' + zvu' + uvz' \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

Taigi, kelių funkcijų sandaugos išvestinė yra lygi sumai sandaugų kiekvienos funkcijos išvestinės iš visų kitų.

Padauginę abidvi lygybių (3) ir (5) dali iš dx , lengvai išreikšime jas diferencialais

$$dy = d(zu) = zdu + udz, \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

ir

$$dy = d(zuv) = zudv + zvdu + uvdz \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

Pastebėjimas. Jeigu viena duotųjų funkcijų virsta pastovia tiekybe c , pav., jei $u=c$, tai lygybė (1) virsta

$$y = cz, \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

lygybė (3) tada pavirsta šitokia:

$$y' = (cz)' = cz', \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

o lygybė (6) duoda

$$dy = d(cz) = cdz, \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

nes $c'=0$ ir $dc=0$ [§ 31, lyg. (2) ir (3)].

Taigi, pastovusis daugiklis galima išskelti iš po diferencijimo ženklo.

Pavyzdys. Funkcijos $y=8x$ išvestinė bus $y'=(8x)'=8x'=8 \cdot 1=8$, nes argumento x išvestinė x' visumet yra lygi 0.

Iš tiesų,

$$x' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \quad \dots \dots \dots \quad (11)$$

§ 34. Funkcijų dalmens diferenciaciavimas.

Tegu y yra dviejų funkcijų z ir u dalmuo, t. y., tegu

$$y = \frac{z}{u}, \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

kur z ir u yra x funkcijos. Laikydamiesi tų pačių pažymėjimų, kaip ir pereituose §§, gauname paeiliui

$$y + \Delta y = \frac{z + \Delta z}{u + \Delta u},$$

$$\Delta y = \frac{z + \Delta z}{u + \Delta u} - \frac{z}{u} = \frac{u \Delta z - z \Delta u}{u(u + \Delta u)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u \frac{\Delta z}{\Delta x} - z \frac{\Delta u}{\Delta x}}{u(u + \Delta u)}.$$

Pereidami prie ribos, kai $\Delta x=0$, randame

$$y' = \left(\frac{z}{u} \right)' = \frac{uz' - zu'}{u^2}, \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

ir, vad.,

$$dy = d\left(\frac{z}{u}\right) = \frac{udz - zdu}{u^2} \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

§ 35. Laipsnio išvestinė.

Sakysime, turime funkciją

$$y = x^n \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

kur n yra pastovus skaičius. Išnagrinėkime šiuos atsitikimus.

I. n yra sveikasis teigiamasis skaičius.

Jeigu x -ui duosime priauglių h , tai funkcijos $y=x^n$ priauglius bus

$$(x+h)^n - x^n.$$

Pakélé $(x+h)^n$ laipsniu iš Njutono binomo ir padaliję funkcijos priauglių iš h , gauname

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} h + \dots + h^{n-1}.$$

Riboje, kai $h=0$, pastaroji lygybė pavirs šitokia:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1},$$

nes visi dešiniosios dalies nariai, išskyrus pirmąjį, riboje virsta nuliais.

Tuo būdu, funkcijos $y=x^n$ išvestinė reiškiasi šia formula:

$$y'=(x^n)'=nx^{n-1} \dots \dots \dots (2)$$

II. n yra sveikasis neigiamasis skaičius.

Tegu $n=-m$, kur m yra teigiamasis skaičius. Tada turėsime

$$y=x^n=x^{-m}=\frac{1}{x^m}.$$

Iimdami y -ko išvestinę, kaip dalmens išvestinę (§ 34), gauname

$$y'=\frac{x^m \cdot 1' - 1 \cdot (x^m)'}{x^{2m}}=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{-m-1},$$

arba, pakeisdami $n=-m$,

$$y'=(x^n)'=nx^{n-1}.$$

Ši formula turi tokį pat pavidalą, kaip ir formula (2), t. y., abiejais atsitinkimais taisykle išvestinei surasti yra ta pati.

Vėliau bus įrodyta (§ 40), kad ta formula yra teisinga, vis tiek kokia yra n reikšmė.

Pavyzdys. Rasti funkcijos $y=3x^5+\frac{1}{4}x^3-6x^2+10-x^{-2}$ išvestinę.

Turime $y'=(3x^5)'+(\frac{1}{4}x^3)'-(6x^2)' + 10' - (x^{-2})' = 3(x^5)' + \frac{1}{4}(x^3)' - 6(x^2)' - (-2)x^{-3} = 3 \cdot 5x^4 + \frac{1}{4} \cdot 3x^2 - 6 \cdot 2x + 2x^{-3} = 15x^4 + \frac{3}{4}x^2 - 12x + 2x^{-3}$.

§ 36. Rodiklinės funkcijos išvestinė.

Tegu reikia surasti rodiklinės funkcijos

$$y=a^x \dots \dots \dots (1)$$

išvestinę.

Davę argumentui x prieauglių h , bendraja taisykle gauname

$$y'=\lim_{h=0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h=0} \left(a^x \cdot \frac{a^h-1}{h} \right)=a^x \cdot \lim_{h=0} \frac{a^h-1}{h} \dots \dots (2)$$

Riboje $\frac{a^h-1}{h}$ virsta neapibrėžtu reiškiniu $\frac{0}{0}$. Tam neapibrėžtu-mui išaiškinti darome taip. Sakysime,

$$a^h-1=\frac{1}{n},$$

iš kur

$$a^h=1+\frac{1}{n}.$$

Logaritmuodami šią lygybę pagrindu a , turime

$$h=\lg_a \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Del to, pastebėjė, kad, h artėjant nuliui, n artėja begalybei, ga-lime rašyti

$$\begin{aligned} \lim_{h=0} \frac{a^h-1}{h} &= \lim_{n=\infty} \frac{1}{n \lg_a \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\lg_a \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \\ &= \frac{1}{\lim_{n=\infty} \lg_a \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{\lg_a \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{\lg_a e} = \lg_e a. \dots \dots (3) \end{aligned}$$

Naudodamiesi šia išvada, iš lygybės (2) gauname

$$y'=(a^x)'=a^x \lg_e a \dots \dots \dots (4)$$

Tokia yra rodiklinės funkcijos išvestinė.

Atskiru atveju, kai $a=e$, $\lg_e e=1$, ir formula (4) virsta

$$y'=(e^x)'=e^x, \dots \dots \dots (5)$$

t, y., funkcijos e^x išvestinė yra lygi pačiai funkcijai.

§ 37. Logaritmo išvestinė.

Rasime logaritminės funkcijos

$$y=\lg_a x \dots \dots \dots (1)$$

išvestinę.

Davę x -ui prieauglių h , gausime bendraja taisykle

$$y'=\lim_{h=0} \frac{\lg(x+h)-\lg x}{h}=\lim_{h=0} \frac{\lg \frac{x+h}{x}}{h}=\lim_{h=0} \frac{\lg \left(1 + \frac{h}{x} \right)}{h}.$$

Dékime dabar

$$\frac{h}{x}=\frac{1}{n},$$

iš kur

$$h=\frac{x}{n}.$$

Tada h artėjimui nuliui atitiks n artėjimas begalybei. Del to, randame

$$\lim_{h=0} \frac{\lg \left(1 + \frac{h}{x} \right)}{h}=\lim_{n=\infty} \frac{n \lg \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{x}=\frac{1}{x} \lim_{n=\infty} \left[n \lg \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]=$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \lg \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{x} \lg \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{x} \lg e.$$

Taigi, $y' = (\lg_a x)' = \frac{\lg_a e}{x}$ (2)

Tokia yra logaritminės funkcijos išvestinė.

Jeigu imsimė naturalinius logaritmus, tai jiems $\lg_e e = 1$, ir lygybė (2) virsta

$$y' = (\lg_e x)' = \frac{1}{x} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (3)$$

§ 38. Tiesioginių trigonometrinių funkcijų išvestinės.

I. Sinuso išvestinė.

Tegu duota funkcija

$$y = \sin x \quad \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

Ieškodami jos išvestinės bendraja taisykle, gauname

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{nes santykio } \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \text{ riba yra lygi } 1 \quad (\S 15), \text{ o } \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \\ = \cos \lim_{h \rightarrow 0} \left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x. \end{aligned}$$

Tuo būdu, sinuso išvestinė yra tokia:

$$y' = (\sin x)' = \cos x \quad \dots \dots \dots \dots \quad (2)$$

II. Kosinuso išvestinė.

Tokiui pat keliui, kaip ir I atveju, rasime, kad funkcijos

$$y = \cos x \quad \dots \dots \dots \dots \quad (3)$$

išvestinė yra

$$y' = (\cos x)' = -\sin x \quad \dots \dots \dots \dots \quad (4)$$

III. Tangento išvestinė.

Tegu turime funkciją

$$y = \tan x \quad \dots \dots \dots \dots \quad (5)$$

Pastebėjė, kad $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, rasime funkcijos (5) išvestinę, kaip dviejų funkcijų dalmens išvestinę ($\S 34$)

$$y' = \frac{\cos x (\sin x)' - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Vad., tangento išvestinė turi pavidalą

$$y' = (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (6)$$

IV. Kotangento išvestinė.

Galvodami panašiai, kaip ir III atvejyje, lengvai rasime, kad funkcijos

$$y = \cot x \quad \dots \dots \dots \dots \quad (7)$$

išvestinė yra

$$y' = (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (8)$$

§ 39. Sudėtinės funkcijos ir jų diferencijavimas

Tegu $y = f(z)$ yra z funkcija, o $z = \varphi(x)$ yra x funkcija. Tada, aišku, $y = f[\varphi(x)]$ yra taip pat x funkcija. Tuo atveju funkciją y vadina sudėtine x funkcija, arba x funkcijos funkcija. Pav., $y = \tan \lg x$ yra sudėtine x funkcija; dėdami $\lg x = z$, turėsime $y = \tan z$, t. y., y yra z -o funkcija; o z savo ruožtu yra x -o funkcija; tuo būdu, y yra x -o funkcijos funkcija.

Rasime sudėtinės funkcijos išvestinę.

Tegu y yra sudėtinė x funkcija, t. y., tegu

$$y = f(z), \text{ o } z = \varphi(x) \quad \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

Jeigu duosime x -ui kai kurį prieauglių Δx , tai ir z gaus atitinkamą prieauglių Δz , o del z pakitėjimo ir y gaus kai kurį prieauglių Δy , taip kad

$$\Delta z = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x),$$

$$\Delta y = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Istatę šias lygybes į tapatybę

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

$$\text{turėsime } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}.$$

Riboje, kai $\Delta x = 0$, pastaroji lygybė pavirs šitokia:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x},$$

$$\text{arba } y' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \varphi'(x) \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

Artėjant Δx nuliui, Δz taip pat artės nuliui; todėl, galime rašyti

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z), \quad \dots \quad (3)$$

kur $f(z)$ reiškia funkcijos $f(z)$ išvestinę, paimtą kintamuoju z , t. y., laikant jį argumentu.

Naudojantis formula (3), lygybei (2) galima duoti pavidalas

$$y' = f'(z) \cdot \varphi'(x), \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

t. y., sudėtinės funkcijos išvestinė yra lygi sandaugai abiejų funkcijų išvestinių, paimtų tuo kintamuoju, nuo kurio ji betarpiškai pareina.

Padauginę lygtis (4) iš dx , randame

$$dy = f'(z) \varphi'(x) dx,$$

arba, pakeitę, remdamiesi lyg. (1), $\varphi'(x) dx = dz$,

$$dy = f'(z) dz \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

Palyginimas šios lygybės su § 30 lygybe (2) rodo, kad funkcijos diferencialas turi tą patį pavidalą, vis tiek ar z yra nepriklausas nuo niekur kintamasis, ar kito kintamojo funkcija.

Panašiu būdu, jeigu turėtumėme

$$y = f(z), \quad z = \varphi(u), \quad u = \psi(x),$$

tai rastumėme

$$y' = f'(z) \cdot \varphi'(u) \cdot \psi'(x),$$

arba diferencialais

$$dy = f'(z) \varphi'(u) \psi'(x) dx \Rightarrow f'(z) \varphi'(u) du = f'(z) dz.$$

Pavyzdys. Rasti funkcijos $y = \sin 2x^2$ išvestinę.

Dėdami $2x^2 = z$, turime

$$y = \sin z, \quad z = 2x^2;$$

eidami lygybe (4), gauname $y' = (\sin z)'(2x^2)'$;

$$\text{bet } \frac{dy}{dz} = (\sin z)' = \cos z = \cos 2x^2, \quad (2x^2)' = 2(x^2)' = 2 \cdot 2x = 4x;$$

$$\text{todel, } y' = (\sin 2x^2)' = \cos 2x^2 \cdot 4x = 4x \cos 2x^2.$$

§ 40. Laipsnio išvestinė bendruoju atveju.

Tegu duota funkcija

$$y = x^n \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

kur n gali būti ir trupmeninis, išmatuojamas ar neišmatuojamas skaičius.

Logaritmuodami lygybę (1) naturaliniu pagrindu, gauname

$$\lg y = n \lg x \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

Paémę abiejų dalių išvestines, turime

$$(\lg y)' = (n \lg x)' \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

Bet $\lg y$ yra sudėtinė x -o funkcija; todėl, jo išvestinė (§ 39) turi pavidalą

$$(\lg y)' = \frac{y'}{y};$$

$$\text{o } (n \lg x)' = n \cdot \frac{1}{x}; \quad \text{vad., lygybę (3) galime pakeisti tokia:}$$

$$\frac{y'}{y} = n \cdot \frac{1}{x},$$

iš kur

$$y' = \frac{ny}{x} = \frac{nx^n}{x} = nx^{n-1} \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

Taigi, laipsnio išvestinės formula $(x^n)' = nx^{n-1}$ yra teisinga bet kuriai rodiklio n reikšmei.

§ 41. Šaknies išvestinė.

Rasime išvestinę funkcijos

$$y = \sqrt[n]{x} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

Šaknį pakeisime laipsniu su trupmeniniu rodikliu ir suvoksimė jo išvestinę iš atitinkamos § 40 formulas (4). Turime

$$y' = (\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Taigi,

$$y' = (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

Rasime išvestines kelių funkcijų, iš kurių sudėti įeina šaknies ženklas.

Pavyzdys I. Rasti funkcijos $y = \sqrt[3]{x^2}$ išvestinę.

$$\text{Turime } y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}; y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}}.$$

Pavyzdys II. Rasti funkcijos $y = \sqrt[5]{3x^3}$ išvestinę.

$$\text{Turime } y = \sqrt[5]{3x^3} = \sqrt[5]{3} x^{\frac{3}{5}}; y' = \sqrt[5]{3} \cdot \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3 \sqrt[5]{3}}{5 \sqrt[5]{x^2}}.$$

Pavyzdys III. Rasti funkcijos $y = \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}$ išvestinę.

$$\text{Turime } y = \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}} = x^2 \cdot x^{-\frac{3}{4}} = x^{\frac{5}{4}}; y' = \frac{5}{4} x^{\frac{1}{4}} = \frac{5 \sqrt[4]{x}}{4}.$$

Pavyzdys IV. Rasti funkcijos $y = \sqrt{a-bx}$ išvestinę.

$$\begin{aligned} \text{Turime } y &= \sqrt{a-bx} = (a-bx)^{\frac{1}{2}}; y' = \frac{1}{2}(a-bx)^{-\frac{1}{2}} \cdot (a-bx)' = \\ &= \frac{1}{2}(a-bx)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-b) = -\frac{b}{2\sqrt{a-bx}}. \end{aligned}$$

Pavyzdys V. Rasti funkcijos $y = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$ išvestinę.

$$\begin{aligned} \text{Turime } y &= \frac{x}{x+\sqrt{x}} = x(x+x^{\frac{1}{2}})^{-1}; y' = x[(x+x^{\frac{1}{2}})^{-1}]' + \\ &+ (x+x^{\frac{1}{2}})^{-1} \cdot 1 = -x(x+x^{\frac{1}{2}})^{-2}[1+(x^{\frac{1}{2}})'] + (x+x^{\frac{1}{2}})^{-1} = \\ &= -x(x+x^{\frac{1}{2}})^{-2}(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}) + (x+x^{\frac{1}{2}})^{-1} = (x+x^{\frac{1}{2}})^{-2}[-x(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}) +] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (x+x^{\frac{1}{2}})] = (x+x^{\frac{1}{2}})^{-2}(-x-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+x+x^{\frac{1}{2}}) = (x+x^{\frac{1}{2}})^{-2} \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})^2} \end{aligned}$$

Pavyzdys VI. Rasti funkcijos $y = \frac{a}{\sqrt{a+\sqrt{x}}}$ išvestinę.

$$\begin{aligned} \text{Turime } y &= \frac{a}{\sqrt{a+\sqrt{x}}} = a(a+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}; y' = a(-\frac{1}{2})(a+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{3}{2}} [a' + (x^{\frac{1}{2}})'] = -\frac{a}{2}(a+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{a}{4\sqrt{x}\sqrt{a+\sqrt{x}}^3}. \end{aligned}$$

§ 42. Atvirkštinių funkcijų diferencijavimas.

Tegu

$$y=f(x) \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

$$x=\varphi(y) \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

Yra dvi viena kitai atvirkštinių funkcijų.

Dažnai gali atsitikti, kad, užuot nagrinėjus funkcijos $f(x)$ ypatybes, yra patogiau nagrinėti funkcijos $\varphi(y)$ ypatybes. Parodysime, kad, žinodami vienos jųdvieju išvestinę, mokėsime rasti ir antrosios išvestinę.

Žiūrėsime iš x , kaip iš argumentą, o iš y , kaip iš jo funkciją. Imdami abiejų lyg. (1) ir (2) dalį išvestines, gauname

$$\begin{aligned} y' &= f'(x), \\ x' &= [\varphi(y)]'. \end{aligned}$$

Kadangi $\varphi(y)$ yra sudėtinė x funkcija, tai $[\varphi(y)]' = \varphi'(y)y'$; be to, $x'=1$; taigi, gauname lygtis

$$y' = f'(x) \text{ ir } 1 = \varphi'(y)y'.$$

Panaikinę iš šių lygčių y' , gauname formulą

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

Tatai ir yra sąryšis tarp dvieju viena kitai atvirkštinių funkcijų išvestinių.

Reikia atminti, kad, naudojantis formula (3), abi jos dalis reikia išreikšti ta pačia kintamaja iš lygčių (1) arba (2).

§ 43 Atvirkštinė trigonometrinių funkcijų išvestinės.

Iš trigonometrijos žinome, kad atvirkštinės trigonometrinės funkcijos yra daugiareikšmės. Taip antai, funkcija $y=\arcsinx$ reiškia lanką, kurio sinusas yra x . Bet tokį lanką, turinčią tą patį sinusą x , yra begalinė daugybė. Kad nebūtų to neaiškumo, sutarta diferenciaciavimo reikalui susiaurinti atvirkštinės trigonometrinės funkcijų apibrėžimą, taip kad jos pataptų vienareikšmėmis. Del to, toliau kiekvienu atveju bus pasakomos tos ribos, tarp kurių keičiasi atitinkama funkcija, kad ji būtų vienareikšmė.

I. Arksinuso išvestinė.

Tegu duota funkcija

$$y=\arcsinx \dots \dots \dots \quad (1)$$

Iš lygybės (1) eina, kad

$$x=\sin y \dots \dots \dots \quad (2)$$

Eidami § 42 lygybe (3), turime

$$(\arcsinx)' = \frac{1}{(\sin y)'} \dots \dots \dots \quad (3)$$

Bet $(\sin y)' = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$; todėl, lygybė (3) virsta

$$(\arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \dots \dots \dots \quad (4)$$

Tatai ir yra arksinuso išvestinė. Kad nebūtų daugiareikšmumo, sutarta žiūrėti tik tas jo reikšmes, kurios yra ribose nuo $-\frac{\pi}{2}$ iki $+\frac{\pi}{2}$. Tada, vis tiek kokia būtų x reikšmė tarp -1 ir $+1$, jai visumet teatitiks vienintelę \arcsinx reikšmę. Del to, ir $\sqrt{1-x^2}$ (t. y., $\cos y$) formuloje (4) paimtas tik su ženklu $+$, nes pasaulyose ribose tas didumas visumet yra teigiamas.

II. Arkkosinuso išvestinė.

Tegu turime funkciją

$$y=\arccos x, \dots \dots \dots \quad (5)$$

ir, vad.,

$$x=\cos y \dots \dots \dots \quad (6)$$

Remdamiesi § 42 lygybe (3), randame

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} \dots \dots \dots \quad (7)$$

Bet $(\cos y)' = -\sin y = -\sqrt{1-x^2}$; todėl, lygybė (7) virsta

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \dots \dots \dots \quad (8)$$

Tatai ir yra arkkosinuso išvestinė. Kad arkkosinuso funkcija būtų vienareikšmė, žiūrimos tik tos jo reikšmės, kurios randasi tarp 0 ir π . Tada bet kuriai x reikšmei tarp -1 ir $+1$ visumet teatitiks vienintelę $\arccos x$ reikšmę. Del to, ir $\sqrt{1-x^2}$ (t. y., $\sin y$) formuloje (8) paimtas tik su ženklu $+$, nes nurodytose ribose tas didumas visumet yra teigiamas.

III. Arkfangento išvestinė.

Tegu turime

$$y=\arctgx, \dots \dots \dots \quad (9)$$

taip kad

$$x=\operatorname{tg} y \dots \dots \dots \quad (10)$$

Tokių pat kelių, kaip ir I ir II atvejuose, gauname

$$(\arctgx)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Taigi, arkfangento išvestinė yra

$$y'=(\arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} \dots \dots \dots \quad (11)$$

Arktangento funkcija yra vienareikšmė tarp $-\frac{\pi}{2}$ ir $+\frac{\pi}{2}$; x gali kitėti nuo $-\infty$ iki $+\infty$.

IV. Arkkotangento išvestinė.

Belieka rasti funkcijos

$$y=\operatorname{arcctgx} \dots \dots \dots \quad (12)$$

išvestinė.

Funkcija, jai atvirkštinė, bus

$$x=\operatorname{ctg} y \dots \dots \dots \quad (13)$$

Tokių pat kelių, kaip ir I ir II atvejuose, gaume

$$(\operatorname{arcctgx})' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\frac{1}{\sin^2 y} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Taigi, arkkotangento išvestinė yra

$$y' = (\arctgx)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad \dots \quad (14)$$

Arkkotangento funkcija yra vienareikšmė tarp 0 ir π ; x gali kitėti nuo $-\infty$ iki $+\infty$.

§ 44. Pagrindinių diferencialinės skalčiuotės formulų lentelė.

1. $c' = 0$ (c past. tiek.).
2. $x' = 1$.
3. $(z+u+v)' = z'+u'+v'$.
4. $(z-u)' = z'-u'$.
5. $(z+c)' = z'$.
6. $(cz)' = cz'$.
7. $(zu)' = zu' + uz'$.
8. $\left(\frac{z}{u}\right)' = \frac{uz' - zu'}{u^2}$.
9. $(x^n)' = nx^{n-1}$.
10. $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
11. $(\lg_a x)' = \frac{\lg_a e}{x}$.
12. $(a^x)' = a^x \lg_e a$.
13. $(\lg_e x)' = \frac{1}{x}$.
14. $(e^x)' = e^x$.
15. $(\sin x)' = \cos x$.
16. $(\cos x)' = -\sin x$.
17. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
18. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
19. $(\arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.
20. $(\arccctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

§ 45. Pavyzdžiai.

Rasti šių funkcijų išvestinės.

1. $3x^2$.
2. $10x^5$.
3. $8x^8$.
4. $4x+1$.
5. $2 - \frac{5}{7}x$.
6. $3,5 - 2,5x^2$.
7. $\frac{1}{2}x^4 - 9$.
8. $2x^3 + 3x^2$.
9. $\frac{1}{3}x^6 - x$.
10. $3 + 3x - 3x^4$.

11. $x(x+7)$.
12. $x^3 + 4x^2 - 5x + 1$.
13. $(x^2+2)x^3$.
14. $(2x+1)(9-4x)$.
15. $(4x^2+2x+1)(2x-1)$.
16. $(2x^2-4x-1)(3-5x+7x^2)$.
17. $2x(7-x^2)(x^2+3x-1)$.
18. $\frac{1}{x}$.
19. $\frac{4}{1+x}$.
20. $\frac{11x}{x-1}$.
21. $\frac{x^2+1}{x^3+1}$.
22. $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.
23. $\frac{2x^5+7x^4-4x^3-6x^2+5x+2}{x^3}$.
24. $\frac{1}{x-1} - \frac{x^2+2x}{x^3-1}$.
25. $\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.
26. $\lg_e x^2$.
27. $x \lg_e x$.
28. $\lg_e \frac{1}{x}$.
29. $\lg_e \lg_e x$.
30. $3\lg_e \frac{1+x}{1-x}$.
31. $\sin x + \cos x$.
32. $3\cos^2 x$.
33. $\sin^2 x$.
34. $2\cos \frac{x}{2}$.
35. $\operatorname{tg} \frac{x}{3}$.
36. $\operatorname{ctg} \frac{x^3}{2}$.
37. $\lg_e \cos x$.
38. $\lg_e \operatorname{tg} x$.
39. $\sqrt[5]{x}$.
40. $x\sqrt[5]{x}$.
41. $\sqrt[7]{x^6}$.
42. $x - \sqrt[7]{x}$.
43. $\sqrt[7]{x^2 - a^2}$.
44. $a\sqrt{a^2 - x^2}$.
45. $\sqrt[5]{x^2 + 3x + 1}$.
46. $2x^5 - \frac{4}{x} + 3\sqrt[6]{x}$.
47. $e\sqrt[3]{1-x^2}$.
48. $(1+\sqrt{x})^2$.
49. $x^2\sqrt[3]{2x-1}$.
50. $\frac{x}{1-\sqrt{x}}$.
51. $\frac{x^4-5}{\sqrt[3]{3x}}$.
52. $\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$.
53. $\left(\frac{x}{1+\sqrt{x}}\right)^2$.

54. $\sqrt{\operatorname{tg}x}$.
 56. $\sqrt{\operatorname{tg}2x}$.
 58. $\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$.
 60. $\arcsin 2x$.
 62. $\arcsin \frac{x}{2}$.
 64. $\lg_e \sin \frac{x}{2}$.
 66. $\lg_e \sin \sqrt{2x}$.
 68. $\lg_e \sin \sqrt{\frac{a}{x}}$.
 70. $\lg_e \sin \sqrt{\frac{x}{a}}$.
 72. $\sin^2 x - \cos^2 x$.
 74. $\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x$.
 76. $\frac{\cos x + \frac{1}{2}}{1 + \frac{\cos x}{2}}$.
 78. $\sqrt{1 + \sin 2x}$.
 80. $\lg_e 3x + \lg_e \frac{3}{x}$.
 82. $\lg_e \lg_e x^2$.
 84. $\operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$.
 86. $e^x(x^2 - 2x + 2)$.
 88. $x(1+x^2)\sqrt{1-x^2}$.
 90. x^{2x} .
 92. $\frac{1}{3} \operatorname{arccos}(4x^3 - 3x)$.
 94. $\lg_e \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.
 96. $x^m e^{-x^2}$.
55. $\sqrt{\sin x}$.
 57. $\sqrt{\sin 2x}$.
 59. $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}$.
 61. $\operatorname{arctg} 2x$.
 63. $\lg_e \operatorname{tg} \frac{\pi+2x}{4}$.
 65. $\lg_e \sin \sqrt{x}$.
 67. $\lg_e \operatorname{tg} \sqrt{2x}$.
 69. $\lg_e \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{x}{2}\right)$.
 71. $\sin^3 x \cos x$.
 73. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.
 75. $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$.
 77. $\frac{\sin x - 2}{2 \sin x - 1}$.
 79. $\lg_e 2x + \lg_e \frac{x}{2}$.
 81. $\lg_e x^2 + \sqrt{1 - \sin 2x}$.
 83. $\arcsin \sqrt{\cos x}$.
 85. $\sin x \sin(30^\circ + x)$.
 87. $x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^3(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$.
 89. x^x .
 91. $(\frac{1}{2}x)^{2x}$.
 93. $2 \sin \sqrt{x} - 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x}$.
 95. $\operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2})$.
 97. $(3x^2 - 5x + 1)^3 \sqrt{x^2 + 3x + 1}$.

98. $(2x - x^2)^{3x-1}$.
 99. $\arccos \frac{1}{x}$.
 100. $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.
 102. $\frac{4 \arcsin x}{3^x}$.
 103. $x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
 104. $\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c$.
 105. $\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \lg(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + c$.
 106. $(2x^6 - 3x^4 - 11x^3 + 5)(x^2 - 5x + 1)$.
 107. $5e^{\sin 2x}$.

IV. Funkcijų kitimo tyrimas.

§ 46 Funkcijų didėjimas ir mažėjimas.

Funkcija $f(x)$ vadinasi didėjanti duotame tarpe (a, b) , jeigu ji, būdama vienareikšmė ir netruki, didėjant x -ui, didėja arba, mažėjant x -ui, mažėja; kitaip kalbant, didėjanti funkcija $f(x)$ patenkina sąlygas

$$\text{arba } \begin{cases} f(x+h) - f(x) > 0, & \text{jei } h > 0, \\ f(x+h) - f(x) < 0, & \text{jei } h < 0. \end{cases} \quad \dots \quad (1)$$

Funkcija $f(x)$ vadinasi mažėjanti duotame tarpe (a, b) , jeigu ji, būdama vienareikšmė ir netruki, didėjant x -ui, mažėja arba, mažėjant x -ui, didėja; kitaip kalbant, mažėjanti funkcija patenkina sąlygas

$$\text{arba } \begin{cases} f(x+h) - f(x) < 0, & \text{jei } h > 0, \\ f(x+h) - f(x) > 0, & \text{jei } h < 0. \end{cases} \quad \dots \quad (2)$$

Kitais žodžiais nusakant, funkcija vadinasi didėjanti, jeigu ji kinta ta pačia prasme, kaip ir jos argumentas, ir funkcija vadinasi mažėjanti, jeigu ji kinta prasme, priešinga savo argumento kitimui.

T e o r e m a. *Jelgu funkcija $f(x)$ duotame tarpe didėja, tai jos išvestinė $f'(x)$ tame pat tarpe yra teigiamai arba lygi*

nuliui, ir jeigu funkcija mažėja, tai jos išvestinė yra neigama arba lygi nuliui.

Iš tikrujų, iš sąlygų (1) didėjančiai funkcijai turime

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0,$$

o iš sąlygų (2) mažėjančiai funkcijai turime

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} < 0.$$

Šiedvi nelygybi turi būti teisingi bet kuriai, kaip norima mažai, h -o reikšmei; vad., jiedvi bus teisingi ir riboje, kai $h=0$, t. y., pirmuoju atveju

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0 \text{ arba } =0,$$

t. y., $f'(x) > 0$ arba $=0$, (3)

o antruoju atveju

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < 0 \text{ arba } =0,$$

t. y., $f'(x) < 0$ arba $=0$ (4)

Taigi, jei $f(x)$ didėja, tai jos išvestinė $f'(x) \geq 0$, o jei $f(x)$ mažėja, tai jos išvestinė $f'(x) \leq 0$. Parodysime dabar, kad yra teisinga ir atvirkštinė teorema.

A t v i r k š t i n ē t e o r e m a. Jeigu duotame tarpe išvestinė $f'(x)$ yra teigama, tai funkcija $f(x)$ tame pat tarpe bus didėjanti, ir jeigu išvestinė yra neigama, tai funkcija bus mažėjanti.

Iš tikrujų, jeigu duota, kad, esant $h=0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x),$$

tai iš to eina, kad, nesant dar $h=0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon, \quad (5)$$

kur ε be galo mažėja, mažėjant h , ir kai h pasiekia savo ribą 0, tai ε virsta nulium. Iš to matome, kad h galima padaryti tiek mažu, kad ε , palyginus su $f'(x)$, bus labai mažas, ir kad deši-

niosios lyg. (5) dalies ženklas pareina nuo pirmojo dėmės ženklo, t. y., nuo $f'(x)$ ženklo; vad., jeigu $f'(x) > 0$, tai dešinioji tos lygybės dalis yra didesnė už nulių, ir, del to,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0.$$

Iš čia aišku, kad $f(x+h)-f(x)$ ir h turi būti vienodų ženklių, t. y.,

$$f(x+h)-f(x) > 0, \text{ jei } h > 0,$$

$$\text{arba } f(x+h)-f(x) < 0, \text{ jei } h < 0;$$

vad., einant sąlygomis (1), funkcija $f(x)$ yra didėjanti.

Tokiu pat keliu galima įrodyti, kad, jei $f'(x) < 0$, tai $f(x)$ yra mažėjanti funkcija.

Pavyzdys. $y = \sin x$.

Kaip žinome iš trigonometrijos, x -ui didėjant nuo $-\frac{\pi}{2}$

iki $+\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ taip pat didėja; todėl, ši funkcija yra didėjanti tarpe $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; vad., jos išvestinė tame pat tarpe turi būti teigiamą; iš tiesų, $(\sin x)' = \cos x > 0$.

47. Rollio teorema.

Rollio teorema yra tokia:

Jeigu funkcija $f(x)$, vienareikšmė ir netrukiai tarpe nuo a iki b, turi tame tarpe netrukiai išvestinę ir jeigu funkcijos kraštinės reikšmės $f(a)$ ir $f(b)$ virsta nuliais, tai tarp a ir b rasis bent viena reikšmę c, kuriai išvestinė $f'(x)$ virsta nuliumi.

Jeigu funkcija $f(x)$ kokiai nors argumento reikšmei c tarpe (a, b) virsta nulium, tai jos išvestinė $f'(x)$ tai pačiai argumento reikšmei taip pat virs nulium, ir mes gausime $f'(c)=0$. Teorema šiuo atskiru atveju bus įrodyta.

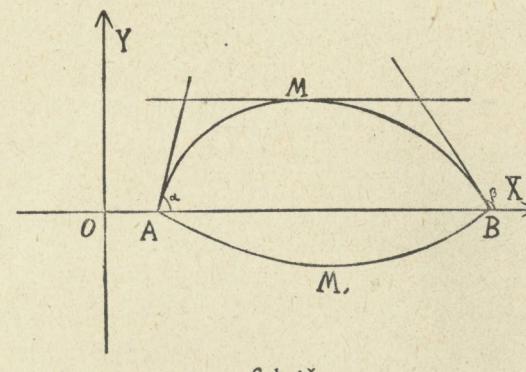
Sakysime, funkcija $f(x)$ tarpe nuo $x=a$ iki $x=b$ nulium nevirsta. Kadangi, duotaja sąlyga, ji yra tame tarpe netrukiai funkcija, tai nuo savo vienos kraštinės reikšmės $f(a)$, lygios nuliui, ji gali pereiti prie kitos savo kraštinės reikšmės $f(b)$, taip pat lygios nuliui, visą laiką būdama arba tik teigiamą arba tik neigiamą.

Tegu $f(x)$ būna duotame tarpe tik teigama. Tadá, eidama nuo savo kraštinės reikšmės $f(a)$, lygios nuliui, ji turi didéti; vad., jos išvestinė turi būti $f'(x) \geq 0$ (§ 46). Artédama kitai savo kraštinei reikšmei $f(b)$, lygiai nuliui, funkcija turi mažéti; vad., jos išvestinė turi būti $f'(x) \leq 0$. Tuo būdu, išvestinė $f'(x)$ turi pakeisti savo ženkla, t. y., iš teigiamos ji turi pasidaryti neigiamą. Bet, kadangi, duotaja sąlyga, išvestinė taip pat yra netruki, tai toks jos ženklo pakeitimasis gali įvykti ne kitaip, kaip tik peréjus jai per nulinę reikšmę. Taigi, duotajame tarpe turi būti tokia argumento x reikšmė c , kuriai $f'(c)=0$. Ir šiuo atveju Rollio teorema įrodyta.

Panašiu keliu lengvai galima įsitikinti Rollio teoremos teisigumu ir tuo atveju, kada funkcija $f(x)$ būna duotajame tarpe tik neigiamą.

§ 48. Geometrinis Rollio teoremos vaizdavimas.

Tegu turime funkciją $y=f(x)$, kuri virsta nuliais, kai $x=a$ ir $x=b$, t. y., kuriai $f(a)=0$ ir $f(b)=0$. Tatai reiškia, kad kreivoji AMB (6 brėž.), kuri vaizduoja funkcijos $f(x)$ kitimo eigą,



perkerta iksų aši taškuose A ir B , kurių abscisos lygios atitinkamai a ir b . Tegu kreivoji AMB , išėjusi iš taško A , toliau eina, kildama viršuj igrekų ašies. Tada kreivosios liečiamoji taške A sudaro su iksų ašimi smailajį kampą α , kurio $\operatorname{tg} \alpha > 0$. Artindamas prie taško B , kreivoji leidžiasi žemyn; tada jos liečiamoji taške B sudaro su iksų ašimi bukajį kampą β , kurio $\operatorname{tg} \beta < 0$.

Kad liečiamosios kampo su iksų ašimi tangentas galėtų iš teigiamų reikšmių pereiti į neigiamas, pati liečiamoji bent vieną kartą turi pereiti per tokią padėtį — tašką M su abscisa, sakyse, c , gulinčią tarp a ir b — kurioje ji yra lygiagretė su iksų ašimi, nes toje padėtyje jos kampo tangentas, t. y., funkcijos išvestinė $f'(c)$, pavirsta nuliumi.

Taip pat ir tuo atveju, kai kreivoji, išėjusi iš taško A , eina į tašką B , būdama žemiau iksų ašies, joje turi būti toks taškas M_1 , kuriame jos liečiamoji vra lygiagretė su iksų ašimi.

§ 49. Liagranžo teorema.

Jeigu funkcija $f(x)$ tarpe nuo $x=a$ iki $x=b$ yra netruki ir jeigu jos išvestinė $f'(x)$ tame pačiame tarpe yra taip pat netruki, tai tarp a ir b yra bent viena tokia reikšmė c , kuriai bus teisinga lygybė

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Pažymėkime raide k skaičių $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, taip kad

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = k,$$

iš kur

$$f(b)-f(a)-k(b-a)=0 \dots \dots \dots (1)$$

Imkime naują funkciją

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-k(x-a), \dots \dots \dots (2)$$

kurioje k ir a yra tie patys pastovūs dydžiai, kaip ir lygybėje (1). Funkcijos $\varphi(x)$ išvestinė bus

$$\varphi'(x)=f'(x)-k \dots \dots \dots (3)$$

Kadangi duota, kad $f(x)$ ir $f'(x)$ yra netrukios, tai iš lygybės (2) vedame, kad ir $\varphi(x)$ yra netruki, o iš lygybės (3), kad ir $\varphi'(x)$ yra netruki; be to, funkcija $\varphi(x)$ virsta nulium argumento reikšmėmis a ir b . Vad., funkcijai $\varphi(x)$ gali būti pritaikinta Rollio teorema (§ 47), einant kuria išvestinė $\varphi'(x)$ turi virsti nulium kai kuriai x reikšmei c , gulinčiai tarp a ir b ; todėl, iš lygybės (3) gauname

$$\varphi'(c)=f'(c)-k=0,$$

$$k=f'(c),$$

iš kur

arba, pakeitę k jo aukščiau pasakyta reikšme,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \dots \dots \dots \quad (4)$$

kas ir reikėjo įrodyti.

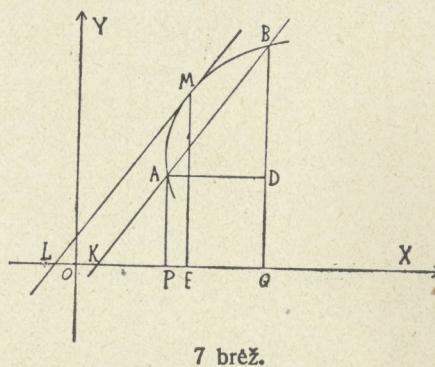
Formulai (4) galima duoti kitoks pavidalas. Parašykime x vietoje a ir $x+h$ vietoje b . Tada vietoje $b-a$ teks rašyti h , o skaičių c (gulintį tarp a ir b), aišku, galime taip išreikšti: $x+\Theta h$, kur Θ yra kai kuris skaičius tarp 0 ir 1. Tada formula (4) gaus pavidalą

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\Theta h), \quad 0 < \Theta < 1 \dots \dots \quad (5)$$

Lygybę (5) dažnai vadina baigtinių priauglių Liagranžo formula.

§ 50. Geometrinis Liagranžo teoremos vaizdavimas.

Tegu AB (7 brėž.) yra kreivoji, vaizduojanti duotąjį funkciją $f(x)$. Tegu $OP=a$ ir $OQ=b$. Tada $AP=f(a)$ ir $BQ=f(b)$. Nutiesę iš taško A tiesiąją AD , lygiagretę su iksų ašimi, ligi



7 brēž.

susitinkant jai taške D su ordinata BQ , randame

$$BD = BQ - DQ = BQ - AP = f(b) - f(a)$$

ir

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BD}{PQ} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \operatorname{tg} \angle BAD = \operatorname{tg} \angle BKX.$$

Taigi, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ reiškia kertamosios AB kampinį koeficientą.

Toliau, iš § 28 žinome, kad $f'(c)$ yra kampinis koeficientas lie-

čiamosios, nutiestos per kreivos tašką, kurio abscisa yra c . Irodyta Liagranžo teorema, tarp a ir b yra tokia x -o reikšmė, lygi, sakysime, $OE=c$, kuriai $f'(c) = \operatorname{tg} \angle MLX = \operatorname{tg} \angle BKX$, t. y., tarp taškų A ir B randasi toks taškas M , per kurį nutiestojo kreivos liečiamoji yra lygiagretė su styga AB .

§ 51. Funkcijos maksimumo ir minimumo savoka.

I funkcijos argumento kitimą įprasta žiūrėti, kaip į nepertraukiamą jo didėjimą nuo kokios nors vienos reikšmės iki kitos, o funkcijų kitimas nuo to yra nepaprastai įvairus, kas pareina nuo didelio funkcijų pavidalų įvairumo.

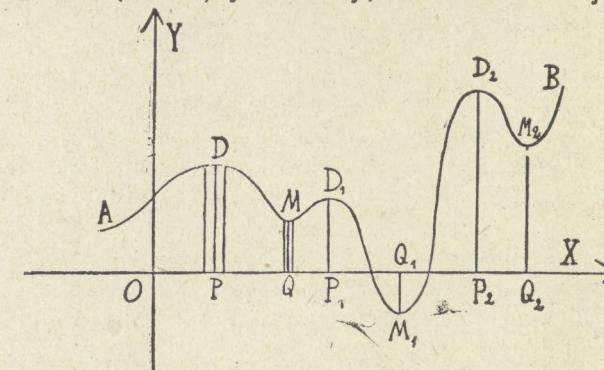
Retai tepasitaiko, kad, netrukiai didėjant argumentui, funkcija arba vien tik didėja, arba vien tik mažėja. Dažniausia būna, kad, argumentui kintant pasakytuoju būdu, funkcijos kitimas yra eilė didėjimų ir mažėjimų, kurie gali kaitaliotis nuo daikto daug sykių, o kartais ir be galo daug sykių.

Jeigu funkcija $f(x)$, netrukiai didėjant x -ui, pirma didėja, o paskui mažėja, tai sako, kad funkcija pereina per savo maksimumą; jeigu funkcija pirma mažėja, o paskui didėja, tai sako, kad funkcija pereina per savo minimumą. Kitaip kalbant, funkcijos maksimumas yra tokia funkcijos reikšmė, kuri yra didesnė už visas jai gretutines reikšmes, o funkcijos minimumas yra tokia jos reikšmė, kuri yra mažesnė už visas jai gretutines reikšmes.

Funkcija gali turėti kelis maksimumus ir minimumus, ir gali atsitikti, kad kitas maksimumas yra mažesnis už kitą minimumą.

Paaškinsime tatai brėžiniu.

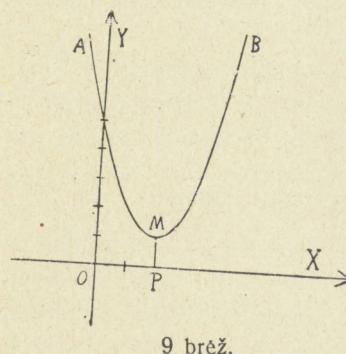
Tegu AB (8 brėž.) yra kreivoji, atitinkanti funkcijai $y=f(x)$.



8 brēž.

Taškuose D , D_1 ir D_2 funkcijos reikšmės DP , D_1P_1 ir D_2P_2 yra didžiausios, palyginus su funkcijos reikšmėmis gretutiniuose viems taškuose. Vad., tos reikšmės DP , D_1P_1 ir D_2P_2 yra funkcijos maksimumai. Taškuose M , M_1 ir M_2 funkcijos reikšmės MQ ir M_1Q_1 ir M_2Q_2 yra mažiausios, palyginus su funkcijos reikšmėmis gretutiniuose viems taškuose. Vad., tos reikšmės MQ , M_1Q_1 ir M_2Q_2 yra funkcijos minimumai. Be to, matome, kad minimumas M_2Q_2 yra didesnis už maksimumus DP ir D_1P_1 .

Išnagrinėkime pavyzdį $y=1+(x-2)^2$.



9 brėž.

minimumo $MP=1$, kai $x=OP=2$.

§ 52 Būtinoji funkcijos éjimo per savo maksimumą arba minimumą sąlyga.

Tegu kai kuriai argumento reikšmei x funkcija $y=f(x)$ eina per savo maksimumą. Tatai, einant apibréžimu, reiškia, kad ji iš didéjančios pavirsta mažéjančia. Bet, funkcijai $f(x)$ didéjant, jos išvestinė $f'(x)$ yra teigiamā (\S 46), o mažéjant funkcijai, jos išvestinė yra neigiamā; del to, tuo momentu, kada funkcija $f(x)$ eina per savo maksimumą, jos išvestinė $f'(x)$ išteigiamos virsta neigiamā, o pakeisti savo ženklą funkcija, jeigu ji yra netruki, gali tiktai perėjusi per nuliu.

Tokių pat būdu įsitikinsime, kad, funkcijai $f(x)$ einant per savo minimumą, jos išvestinė $f'(x)$ yra lygi taip pat nuliui.

Taigi, matome, kad toje vietoje, kurioje funkcija pasiekia savo maksimumą arba minimumą, jos išvestinė (jeigu ta išvestinė yra baigtinė) būtinai pavirsta nuliumi.

Atvirkštine teorema ne visumet téra teisinga: funkcijos išvestinė gali virsti nulium, tačiau, toje vietoje funkcija gali ir ne-

turēti nei maksimumo, nei minimumo. Pav., imkime funkciją $y=(x-1)^3+3$; jos išvestinė y' bus: $y'=3(x-1)^2$. Prilyginę y' nuliui ir išsprendę gautąsias lygtis $3(x-1)^2=0$, randame $x=1$. Šiai x -o reikšmei atitinka $y=3$. Ar yra 3 funkcijos maksimumas arba minimumas? Lengva matyti, kad 3 nera nei maksimumas, nei minimumas. Iš tiesų, kai $x=1-h$, tai $y=3-h^3$, o kai $x=1+h$, tai $y=3+h^3$, t. y., vienos gretutinių funkcijos reikšmių yra mažesnės už 3, o kitos didesnės; vad., 3 nera nei maksimumas, nei minimumas.

§ 53. Funkcijos maksimumo ir minimumo suradimas.

Funkcijos maksimumo ir minimumo suradimo uždaviny susideda iš trijų dalių: 1) rasti ta x -o reikšmę, kuriai funkcija $y=f(x)$ turi maksimumą ar minimumą; 2) rasti pats maksimumo ar minimumo didumas (reikšmę), ir 3) parodyti, ar rastas maksimumas ar minimumas.

Palygint pirmają funkcijos išvestinę nuliui ir išsprendę gautąsias lygtis $f'(x)=0$, rasime tas x reikšmes, kurioms funkcija gali turēti maksimumą ar minimumą.

Einant funkcijai per maksimumą, ji iš didéjančios virsta mažéjančia. Bet didéjančios (t. y., iki pereinant per maksimumą) funkcijos pirmoji išvestinė yra teigiamā, o mažéjančios (t. y., perėjus per maksimumą) funkcijos pirmoji išvestinė yra neigiamā. Vad., kai funkcija eina per maksimumą, jos pirmoji išvestinė keičia savo ženklą pliusą minusu. Panašiai galime parodyti, kad, einant funkcijai per minimumą, jos pirmoji išvestinė keičia savo ženklą minusą pliusu. Peržiūrėj, vaduodamiesi šia taisykle, pirmosios išvestinės ženklus prieš pavirstant jai nulium ir po pavirtimo nulium, iš rastųjų x reikšmių atskirsime tas, kurioms funkcija turi maksimumą arba minimumą. Jeigu kuriai nors x reikšmei pirmoji išvestinė savo ženklo nekeičia, tai tatai yra pažymiu, kad tai x -o reikšmei funkcija neturi nei maksimumo, nei minimumo.

Patį funkcijos maksimumo ar minimumo didumą lengvai rasim, išstatę atitinkamą x reikšmę į funkcijos reiškinį.

Pavyzdys I. Rasti funkcijos $f(x)=2x^3-9x^2+12x-7$ maksimumas arba minimumas.

Imame duotosios funkcijos pirmąjį išvestinę; ji bus $f'(x)=6x^2-18x+12$.

Palyginę šią išvestinę nuliui, gauname lygtis
 $6x^2-18x+12=0$.

Išsprendę tas lygtis, randame jų šaknis
 $x_1=2, x_2=1$.

Ištirsime išvestinės ženklus šių x reikšmių artumoje. Tegu $x=2-h$, kur h yra teigiamas be galo mažas skaičius; tada $f'(2-h)=6(2-h)^2-18(2-h)+12=6h^2-6h=6h(h-1)<0$; tegu $x=2+h$; tada $f'(2+h)=6(2+h)^2-18(2+h)+12=6h^2+6h=6h(h+1)>0$; vad., išvestinė, pereidama per x -o reikšmę 2, iš neigiamos paversio teigama, t. y., pakeitė savo ženkla minusą pliusu; del to, tai x -o reikšmei 2 funkcija turi minimumą. Tokiu pat keliu rasiame, kad $f'(1-h)=6h(h+1)>0$ ir kad $f'(1+h)=6h(h-1)<0$; vad., x -o reikšmei 1 funkcija turi maksimumą.

Belieka rasti pats maksimumo ir minimumo didumas. Istatę į duotąjį funkciją $x=2$ ir $x=1$, gauname

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 7 = -3 \\ \text{ir } f(1) &= 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 7 = -2. \end{aligned}$$

Taigi, galutinai turime

$$\begin{aligned} \text{maks. } f(x) &= -2, \text{ kai } x=1, \\ \text{ir } f(x) &= -3, \text{ kai } x=2. \end{aligned}$$

Funkcijos perėjimo per savo maksimumą arba minimumą pažymiu, be pirmosios išvestinės ženkle keitimosi, gali būti dar antrosios išvestinės ženklas.

Jeigu funkcija $f(x)$, kai $x=a$, pereina per savo maksimumą, tai jos pirmoji išvestinė $f'(x)$ virsta nulium, o paskui mažėja; bet iš § 46 mes žinome, kad, jei funkcija $f'(x)$ mažėja, esant $x=a$, tai jos išvestinė, t. y., antroji funkcijos $f(x)$ išvestinė $f''(x)$ turi būti neigiamą. Taip pat galima paaiškinti, kad, jeigu funkcija $f(x)$ argumento reikšmei a turėtų minimumą, tai $f'(a)$ turi būti lygi nuliui, o $f''(a)$ turi būti teigiamą.

Taigi,

$$\left. \begin{array}{l} \text{jei } f(a) = \text{maks.}, \text{ tai } f'(a) = 0 \text{ ir } f''(a) < 0, \\ \text{jei } f(a) = \text{min.}, \text{ tai } f'(a) = 0 \text{ ir } f''(a) > 0. \end{array} \right\} \dots (1)$$

Jeigu atsitiktų, kad ir $f''(a)=0$, tai maksimumo-minimu-

mo klausimas reikia spręsti iš pirmojo pažymio — pirmosios išvestinės ženkle keitimosi.

Pavyzdys II. Rasti funkcijos $f(x)=-4x^3+3x-5$ maksimumas ir minimumas.

Turime

$$\begin{aligned} f'(x) &= -12x^2+3, \\ f''(x) &= -24x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iš lygčių } -12x^2+3=0 \\ \text{randame } x_1=-\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Atitinkamos $f''(x)$ reikšmės bus

$$\begin{aligned} f''(-\frac{1}{2}) &= -24 \cdot (-\frac{1}{2}) = 12 > 0, f''(\frac{1}{2}) = -24 \cdot \frac{1}{2} = -12 < 0, \\ \text{o funkcijos } f(x) \text{ atitinkamos reikšmės bus} \end{aligned}$$

$$f(-\frac{1}{2}) = -6, f(\frac{1}{2}) = -4.$$

Taigi, galutinai turime

$$\begin{aligned} \text{maks. } f(x) &= -4, \text{ kai } x = -\frac{1}{2}, \\ \text{min. } f(x) &= -6, \text{ kai } x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pavyzdys III. Padalyti duotasis skaičius a į dvi dalis taip, kad tūdvieju dalių kvadratų suma būtų mažiausios reikšmės (minimumas).

Pažymėję vieną ieškomųjų dalių x -u, antrają išreikšime $a-x$, ir teks ieškoti minimumas funkcijos $f(x)=x^2+(a-x)^2=2x^2-2ax+a^2$.

Sudarome funkcijos $f(x)$ pirmąjį ir antrąjį išvestines

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x-2a, \\ f''(x) &= 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iš lygčių } 4x-2a=0 \\ \text{randame } x = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Kadangi $f''(\frac{a}{2})=4>0$, tai rastajai x reikšmei funkcija turi minimumą. Tas minimumas lygus $\frac{a^2}{2}$.

Taigi, ieškomosios sumos mažiausioji reikšmė bus tada, kada duotajį skaičių padalysime pusiau.

Pavyzdys IV. Į duotąjį kūgį išrežti ritinys, kurio tūris būtų didžiausias (maksimumas).

Tegu kūgio aukštinė yra h , jo pagrindo spindulys r , o atitinkami ritinio ilgumai y ir x . Tada ritinio tūris (pažymėkime jį z -u) bus $z = \pi x^2 y$. Iš panašiųjų trikampių randame $\frac{h-y}{x} = \frac{h}{r}$, iš kur $y = h - \frac{hx}{r}$. Del to, turime $z = \pi x^2 \left(h - \frac{hx}{r}\right)$. Tuo būdu, tenka ieškoti maksimumas funkcijos $f(x) = \pi x^2 \left(h - \frac{hx}{r}\right) = \pi x^2 h - \frac{\pi x^3 h}{r}$.

$$\text{Turime } f'(x) = 2\pi h x - \frac{3\pi h x^2}{r},$$

$$f''(x) = 2\pi h - \frac{6\pi h x}{r}.$$

$$\text{Iš lygtių } 2\pi h x - \frac{3\pi h x^2}{r} = 0$$

$$\text{gauname } x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}r.$$

Kadangi $f''(0) = 2\pi h > 0$ ir $f''\left(\frac{2}{3}r\right) = 2\pi h - \frac{6\pi h \cdot 2r}{3r} = -2\pi h < 0$, tai aišku, kad $x = \frac{2}{3}r$ duoda funkcijos maksimumą. Tas maksimumas yra lygus

$$f\left(\frac{2}{3}r\right) = \frac{4}{9}\pi hr^2 - \frac{8\pi hr^3}{27r} = \frac{4}{27}\pi hr^2.$$

Atradę dar ritinio aukštinę y , atitinkančią $x = \frac{2}{3}r$, būtent, $y = \frac{h}{3}$, ir suglaudę viską, galime pasakyti: ieškomasis maksimas, lygus $\frac{4}{27}\pi hr^2$, bus tada, kada įbrėžtojo ritinio pagrindo spindulys sudaro du trečdaliu duotojo kūgio pagrindo spindulio ir, vad., ritinio aukštinė yra tris kartus mažesnė už kūgio aukštinę.

§ 54. Pavyzdžiai.

Rasti maksimumas ir minimumas šių reiškinį (1—34 :

1. $x^2 + 2x + 3$.
2. $3x^2 + 2x - 4$.
3. $3x^2 - 4x + 1$.
4. $3 - 2x - 3x^2$.
5. $x(4 - 3x^2) + 5$.
6. $5x^2 - 5x$.
7. $4x(3 - 2x)$.
8. $2x - (x^3 - \frac{5}{9}\sqrt[3]{6})$.
9. $2x^4 + x - 5$.
10. $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$.
11. $x^5 - 5x + 11$.
12. $\frac{x^3}{3} - 4x + 9$.
13. $(7 + 3x)(2x - 5)$.
14. $(5 - x)(2x + 3)$.
15. $(1 - x)^2 + (3 + x)^2$.
16. $(3x - 2)^2 + (2x - 3)^2$.
17. $(2x + 5)^2 - (4x - 1)^2$.
18. $(3 - 2x)^2 - (2 - 3x)^2$.
19. $\sqrt{3 + 4x - x^2}$.
20. $\sqrt{-2 + 5x - x^2}$.
21. $\frac{x}{3} + \frac{1}{3x}$.
22. $\frac{5}{x^2 - 1}$.
23. $\frac{5}{x} - x$.
24. $\frac{1 - x^2}{4 + x}$.
25. $\frac{x^2}{4 - x^2}$.
26. $\frac{(x+3)(x-2)}{x^2}$.
27. $\frac{2(1+x^2)}{1-x^2}$.
28. $\frac{2-x}{x} + \frac{x}{2-x}$.
29. $\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$.
30. $\frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$.
31. $\frac{a^2}{x} - \frac{b^2}{x-a}$.
32. $3\sqrt[3]{(x-a)^2 + 2x}$.
33. $\sin x \cos x$.
34. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.
35. Parodyti, kad, esant $x = \frac{\pi}{3}$, reiškinys $\sin x (1 + \cos x)$ turi maksimumą.
36. Parodyti, kad, kai $x = \frac{\pi}{3}$, reiškinys $\sin^3 x \cos x$ turi maksimumą.
37. I spindulio $r = 3$ apskritimą yra įbrėžti statieji trikampiai. Rasti statiniai to iš jų, kurs turi visų didžiausių plotą.

38. Iš trikampių, turinčių 6 m. pagrindinę ir 16 m. perimetrą, rasti tas, kurio yra visų didžiausias plotas.

39. Iš trikampių, turinčių 12 m. pagrindinę ir 48 kv. m. plotą, rasti tas, kurio perimetras yra visų mažiausias.

40. Iš trikampių, kurių pagrindinė yra a ir prieš ją gulėjantis kampus yra a , rasti tas, kurio aukštinė yra visų didžiausia.

41. Parodyti, kad iš visų stačiakampių, įbrėžtų į duotajį apskritimą, kvadratas turi didžiausią perimetrą ir didžiausią plotą.

42. 150° kampus padalyti į dvi dalis taip, kad jų didžiausiuose sandaugu būtų visų didžiausia.

43. Rasti visų didžiausia sumos $\sin x + \sin y$ reikšmę, žinant, kad $x+y=90^\circ$.

44. Rasti plotas visų mažiausio stačiojo trikampio, apibrėžto aplink apskritimą, kurio spindulys lygus r .

45. Duotas apskritimas, kurio spindulys $r=2$. Iš apibrėžtų aplink jį stačiųjų trikampių rasti tas, kurio perimetras yra visų mažiausias.

46. Iš stačiakampių, turinčių perimetrą $2p$, rasti tas, kurio plotas yra visų didžiausias.

47. Iš stačiakampių, kurių plotas $p=4,5$, rasti tas, kurio įstrižainė yra visų mažiausia.

48. Rasti mažiausias rombas, apibrėžtas aplink apskritimą, kurio spindulys lygus r .

49. Skaičius 162 padalyti į dvi dalis taip, kad jų kvadratiniai šaknių suma būtų visų didžiausia.

50. Trikampio įžambinėje rasti tokis taškas, kad stačiakampis, sudarytas nuleistais iš jo į statinius statmenimis, turėtų visų didžiausią plotą.

51. Iš duotų smailajų trikampių, kurio pagrindinė yra a ir aukštinė h , įbrėžti stačiakampis, kurio plotas būtų visų didžiausias.

52. Iš visų lygiašonių trikampių, įbrėžtų į apskritimą duoto spindulio r , kuris turi visų didžiausią pagrindinės ir aukštines sumą?

53. Iš stačiakampių, turinčių vienokius plotus, rasti tas, kurio perimetras yra visų mažiausias.

54. Iš lygiapločių trikampių, kurių plotas lygus s , rasti tas, kurio perimetras yra visu didžiausias.

55. Į apskritimą, kurio spindulys yra r , įbrėžti lygiašonis trikampis, kurio plotas būtų visų didžiausias.
 56. Iš įbrėžtų į spindulio r rutulį ritinių rasti tas, kurio tūris yra visų didžiausias.
 57. Tarp įbrėžtų į spindulio r rutulį ritinių rasti šonų paviršius to, kuriam jis turi visų didžiausią reikšmę.
 58. Tarp ritinių, kurių tūris lygus v , rasti tas, kuriam apibrėžtojo rutulio spindulys bus visų mažiausias.
 59. Tarp kūgių, turinčių vienokį tūrį v , rasti tas, kurio šonų paviršius yra visų mažiausias.
 60. Rasti tūris mažiausio kūgio, apibrėžto aplink rutulį, kurio spindulys yra r .
 61. Rasti pagrindo spindulys ir aukštinė kūgio, kurs, turėdamas duotajį šonų paviršių, būtų visų didžiausio tūrio.

V. Antralaipsniu kreivuju lieciamosios ir normalies.

§ 55. Apibrėžimas.

Priminsime čia, kad kreivosios liečiamaja taške M vadina-
me kertamosios, einančios per tašką M , ribos padėtį, kai antrasis
jos susikirtimo su kreivaja taškas artinasi sutapti su tašku M .

Kreiviosios normale taške M vadiname liečiamosios statmenų, einanti per lietimo taška M .

§ 56. Liečiamoji

Tegu turime kreivaja, kurios lygtys yra

Rasime lygtis liečiamosios, einančios per jos taška $M(x_0, y_0)$.

Iš analinės geometrijos žinome, kad lygtys liečiamosios, kai tiesiosios, einančios per tašką $M(x_0, y_0)$, turi pavida

$$v - v_1 = m(x - x_1), \quad \dots \quad (3)$$

kur m yra jos kampinės koeficientas, o x ir y jos bégamosios koordinatos.

Bet m , t. y., kampinis liečiamosios koeficientas, yra lygus (§ 28)

$$m = \gamma' = f'(x_1) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (\gamma)$$

Del to, liečiamosios lygtys (β) gauna pavidalą

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1) \dots \dots \dots \quad (1)$$

§ 57. Normalė.

Tegu duota kreivoji

$$y = f(x), \dots \dots \dots \quad (a)$$

ir reikia rasti lygtys normalės, einančios per jos tašką $M(x_1, y_1)$.

Iš analizinės geometrijos žinome, kad lygtys normalės taške $M(x_1, y_1)$, kaip tiesiosios, statmenos su liečiamaja tame pat taške, turi pavidalą

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1), \dots \dots \dots \quad (\beta)$$

kur m yra liečiamosios kampinis koeficientas, o x ir y normalės bégamosios koordinatos.

Išreikškę m lygtyste (β) funkcijos (a) išvestine, gauname

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1) \dots \dots \dots \quad (1)$$

Tatai ir yra lygtys, reiškiančios kreivosios normalės, einančią per jos tašką $M(x_1, y_1)$.

Pavyzdys. Duota kreivoji $y = 3x^4 + 8x^3 - 30x^2 - 72x + 1$; rasti lygtys jos liečiamosios ir normalės, einančios per tašką $(0, 1)$.

Turime

$$y' = f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 60x - 72 \text{ ir } f'(0) = -72.$$

Todel, ieškomasias liečiamosios lygtis gausime pavidale

$y - 1 = -72(x - 0)$, arba galutinai $y + 72x = 1$, o normalės lygtis pavidale

$$y - 1 = \frac{1}{72}(x - 0), \text{ arba galutinai } 72y - x = 72.$$

§ 58. Elipsio liečiamoji ir normalė.

I. Liečiamoji.

Tegu turime elipsio ašines lygtis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots \dots \dots \quad (a)$$

Rasime lygtis liečiamosios jo taške (x_1, y_1) .

Suieškosime tam $y' = f'(x)$ iš lygčių (a) ir įdésime į bendrąsias § 56 liečiamosios lygtis (1).

Išsprendę lygtis (a) y -ui, gauname

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \dots \dots \dots \quad (1)$$

Todel,

$$y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \dots \dots \dots \quad (2)$$

Iš lygčių (1) turime

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{ay}{b}.$$

Naudodamiesi šia lygybe, lygybei (2) duodame pavidalą

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Todel, taškui (x_1, y_1) turime

$$y' = f'(x_1) = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \dots \dots \dots \quad (3)$$

Istatydami iš čionai pirmosios išvestinės reiškinį į § 56 lygtis (1), gauname

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1),$$

iš kur $xx_1 b^2 + yy_1 a^2 = x_1^2 b^2 + y_1^2 a^2$,

arba, padaliję šią lygybę iš $a^2 b^2$, turime

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}.$$

Lengva matyti, kad dešinioji šios lygybės dalis yra lygi 1; todel,

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1. \dots \dots \dots \quad (4)$$

Tai ir yra lygtys, reiškiančios elipsio liečiamąją, einančią per jo tašką (x_1, y_1) .

II. Normalė.

Elipsio, duoto tomis pat ašinėmis lygtimis (a), normalei sudaryti dedame į bendrąsias § 57 normalės lygtis (1) vietoje $f'(x_1)$ elipsio liečiamosios kampinį koeficientą iš lygybės (3). Tada gauname

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

$$\text{arba } (y-y_1) \frac{x_1}{a^2} - (x-x_1) \frac{y_1}{b^2} = 0 \dots \dots \dots \quad (5)$$

Tatai ir yra lygtys, reiškiančios elipsio normalę, einančią per jo tašką (x_1, y_1) .

Pastaba. Jei lygtyste (a) dėsime $a=b=r$, tai jos pavirs apskritimo lygtimi

$$x^2 + y^2 = r^2 \dots \dots \dots \quad (\beta)$$

Tuo atveju lygtis (4) pavirs apskritimo liečiamosios lygtimi

$$xx_1 + yy_1 = r^2, \dots \dots \dots \quad (6)$$

o lygtys (5) — apskritimo normalės lygtimi

$$y = \frac{y_1 x}{x_1} \dots \dots \dots \quad (7)$$

§ 59. Hiperbolės liečiamoji ir normalė.

Tokiai pat protavimais, kaip ir pereitame § 58, lengvai gausime hiperbolės, duotos ašinėmis lygtimi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \dots \dots \dots \quad (a)$$

liečiamosios lygtis pavidale

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1, \dots \dots \dots \quad (1)$$

o normalės lygtis pavidale

$$(y-y_1) \frac{x_1}{a^2} + (x-x_1) \frac{y_1}{b^2} = 0 \dots \dots \dots \quad (2)$$

Lygtyste (1) ir (2) x ir y yra liečiamosios arba normalės bėgamosios koordinatos, o x_1 ir y_1 koordinatos hiperbolės taško, per kurį nutiesta jos liečiamoji arba normalė.

§ 60. Parabolės liečiamoji ir normalė.

I. Liečiamoji.

Tegu parabolė duota lygtimi

$$y^2 = 2px, \dots \dots \dots \quad (a)$$

ir tegu reikia rasti lygtys liečiamosios, einančios per jos tašką (x_1, y_1) .

*Surasime visų pirma lietimo taškui $f'(x_1)$. Imdami abiejų lygybės (a) dalij išvestines, randame

$$2yy' = 2p$$

iš kur

$$y' = \frac{p}{y};$$

vad.,

$$f'(x_1) = \frac{p}{y_1} \dots \dots \dots \quad (1)$$

Istatydami iš čionai pirmosios išvestinės reiškinį į bendrasias § 56 liečiamosios lygtis (1), gauname

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1} (x - x_1),$$

iš kur, prastindami ir darydami paketimus, paeiliui turime

$$y_1(y - y_1) = p(x - x_1), \quad yy_1 - y_1^2 = px - px_1, \quad yy_1 - 2px_1 = px - px_1, \\ yy_1 = p(x + x_1) \dots \dots \dots \quad (2)$$

Lygtys (2) ir yra ieškomosios lygtys, reiškiančios parabolės liečiamąją, einančią per jos tašką (x_1, y_1) .

II. Normalė.

Parabolės (a) normalės lygtis išvesime tokiu pat keliu, kaip ir elipsio normalės lygtis (§ 58). Jos turi ši pavidalą:

$$y_1(x - x_1) + p(y - y_1) = 0, \dots \dots \dots \quad (3)$$

kur x ir y yra bėgamosios normalės koordinatos, o x_1 ir y_1 yra koordinatos parabolės taško, per kurį eina jos normalė.

§ 61. Pavyzdžiai.

1. Sudaryti kreivosios $y(x^2 - 3x + 2) = x - 3$ liečiamosios lygtys, jei lietimo taško abscisa $x = 3 - \sqrt{2}$.

2. Sudaryti kreivosios $x^2(x + y) = a^2(x - y)$ liečiamosios ir normalės lygtys koordinatų pradžioje.

3. Irodyti, kad elipsio $3x^2 + 4y^2 = 27$ ir hiperbolės $x^2 - 0,8y^2 = 1$ liečiamosios, nutiestos per jų susikirtimo tašką, yra viena kitai statmenos.

4. Duočia kreivoji (grandinė linija) lygtinis $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$; per tašką $(0, 1)$ nutiesta tos kreivosios normalė; rasti kampus, kurį ta normalė sudaro su iksų ašimi.

5. Duota kreivoji lygtimi $y=2\lg x$; per tašką $(1, 0)$ •nustesta tos kreivosios normalė; rasti tos normalės lygtys.

6. Įrodyti, kad kreivosios $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ liečiamosios atkarpa tarp koordinatų ašių turi pastovą ilgumą a .

VI. Integralinė skaičiuotė.

§ 62. Neapibrėžtinio integralo sąvoka.

Diferencialinėje skaičiuotėje nagrinėjome ir sprendēme klausimą, kaip iš duotos funkcijos rasti jos diferencialas ir išvestinę. Dabar įsivaizduokime, kad į duotąjį funkciją žiūrime, kaip į išvestinę kitos, tuo tarpu nežinomas, kurią, tačiau, norime surasti. Aišku, reiks tam atstatyti ta funkcija, kurios išvestinė yra duotoji funkcija. Vad., turime klausimą, atvirkščią tam, kurį sprendēme diferencialinėje skaičiuotėje. To atvirkščiojo klausimo sprendimas ir yra vyriausiasis integralinės skaičiuotės uždavinys.

Jeigu duotas funkcijos $F(x)$ diferencialas $dF(x)=f(x)dx$, kame

$$f(x)=F'(x), \dots \dots \dots \quad (1)$$

ir reikia surasti pati funkcija $F(x)$, tai tatai ženklais pažymi taip:

$$F(x)=\int f(x)dx \dots \dots \dots \quad (2)$$

Ženklą \int vadina integralo ženklu. Funkcija $F(x)$, kurią ieškome iš jos diferencijalo, vadinasi duotojo diferencijalo integralas. Funkcija $f(x)$, stovinti po integralo ženklu, vadinasi painegralinė funkcija. Funkcijos $F(x)$ suradimą iš duotosios funkcijos $f(x)$ vadina funkcijos $f(x)$ integravimu.

Paėmę abiejų lygybės (2) dalį išvestines, gausime

$$\left[\int f(x)dx \right]' = F'(x),$$

arba, imdami dėmesin lygybę (1),

$$\left[\int f(x)dx \right]' = f(x).$$

Naudodamiesi šia paskutine lygybe, galime patikrinti integravimą: jeigu rastojo integralo išvestinė yra lygi painegralinei funk-

cijai, tai integralas rastas kaip reikiant. Pav., $\int xdx=\frac{x^2}{2}$, nes $\left(\frac{x^2}{2}\right)'=x$; $\int \cos x dx=\sin x$, nes $(\sin x)'=\cos x$.

Aišku, kad pirmajame pavyzdyme integralu galėjome laikyti ne tik funkciją $\frac{x^2}{2}$, bet, bendrai, funkciją $\frac{x^2}{2}+C$, kur C yra bet kuris pastovus dydis, nes $\left(\frac{x^2}{2}+C\right)'=x$; taip pat ir antrajame pavyzdyme integralu galėjo būti ir funkcija $\sin x+C$.

Ir, bendrai, jeigu $\int f(x)dx$ yra duotosios funkcijos integralas, tai ir funkcija $\int f(x)dx+C$, kur C yra bet kuri pastovi tiekybė, taip pat yra tos pačios funkcijos integralas, nes

$$\left[\int f(x)dx + C \right]' = \left[\int f(x)dx \right]' = F(x).$$

Del to, lygybė (2) gauna pavidalą

$$F(x)=\int f(x)dx+C \dots \dots \dots \quad (3)$$

Iš to matome, kad kiekvienas integralas turi laisvai parinktą pastovų dėmenį, kurį vadina integravimo laisvuoju pastoviuoju. Del to laisvojo pastoviojo buvimo integralo reiškinis turi šiek tiek neapibrėžtą pavidalą ir, per-tat, vadinas neapibrėžtinis integralas.

§ 63. Pagrindinės integralo ypatybės.

I Algebrinės funkcijų sumos integralas lygus tokiai pat algebrinei dėmenų integralų sumai, t. y.,

$$\begin{aligned} \int [f(x)-\varphi(x)+\dots+\psi(x)]dx &= \int f(x)dx - \int \varphi(x)dx + \dots + \\ &+ \int \psi(x)dx \dots \dots \dots \quad (1) \end{aligned}$$

Kad įsitikintumėme šios lygybės teisingumu, gana įrodžius, jog jos kairiosios ir dešiniosios dalies išvestinės yra lygios viena kitai. Iš tiesų, randame, integralo apibrėžimu,

$$\left\{ \int [f(x) - \varphi(x) + \dots + \psi(x)] dx \right\}' = f(x) - \varphi(x) + \dots + \psi(x)$$

ir $\left[\int f(x) dx - \int \varphi(x) dx + \dots + \int \psi(x) dx \right]' = \left[\int f(x) dx \right]' -$
 $- \left[\int \varphi(x) dx \right]' + \dots + \left[\int \psi(x) dx \right]' = f(x) - \varphi(x) + \dots + \psi(x).$

Rastosios išvestinės, kaip matome, yra lygios; vad., lygybė (1) yra teisinga.

II. Pastovusis painTEGRALINĖS funkcijos daugiklis gali būti iškeltas iš po integralo ženklo, t. y.,

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx, \dots \dots \dots \quad (2)$$

kur c yra pastovi tiekybė.

Ši ypatybė įrodoma tokiu pat keliu, kaip ir I. Iš tiesų,

$$\left[\int cf(x) dx \right]' = cf(x)$$

$$\text{ir } \left[c \int f(x) dx \right]' = c \left[\int f(x) dx \right]' = cf(x),$$

t. y., abiejų lygybės (2) dalių išvestinės yra lygios; vad., lygybė (2) yra teisinga.

$$\begin{aligned} \text{Pavyzdys. } \int (7x^5 - 12x^3 + 5\cos x) dx &= \int 7x^5 dx - \int 12x^3 dx + \\ &+ \int 5\cos x dx = 7 \int x^5 dx - 12 \int x^3 dx + 5 \int \cos x dx = 7 \cdot \frac{x^6}{6} - 12 \cdot \frac{x^4}{4} + \\ &+ 5 \sin x + C = \frac{7}{6}x^6 - 3x^4 + 5 \sin x + C. \end{aligned}$$

§ 64. Pagrindinių integralinės skaičiuotės formulų lentelė.

Iš paprastųjų funkcijų išvestinių gauname šias pagrindines integravimo formulas, patikrindami jas diferenciaciavimu:

$$1. \int dx = x + C.$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \lg_e x + C.$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

- | | |
|---|--|
| 5. $\int e^x dx = e^x + C.$ | 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$ |
| 7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$ | 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$ |
| 9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$ | 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$ |
| 11. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$ | |

§ 65. Funkcijų integravimo būdai.

Jeigu painTEGRALINĖ ieškomojo integralo funkcija turi tokį pat pavidalą, kaip ir kurios nors iš pagrindinių § 64 formulų painTEGRALINĖ funkcija, tai tokis integralas randamas betarpiskai, einant atitinkama pagrindine § 64 formula. Kitais atvejais stengiasi visų pirmiai ar tais pakeitimais duoti reiškinui, stovinčiam po integralo ženklu, tokį pavidalą, kad ieškomajam integralui galima būtų taikinti kuri nors iš nurodytųjų pagrindinių integravimo formulų. Yra keli būdai, kurie leidžia tatai padaryti. Nurodysime čia šiuos tris: 1) integravimas skaidymu, 2) integravimas naujo kintamojo įvedimu ir 3) integravimas dalimis.

§ 66. Integravimas skaidymu.

Taikant šis būdas, remiamasi pagrindine sumos integralo ypatybe (§ 63). Juo naudojasi tada, kada painTEGRALINĖ funkcija galima išskaidyti tokiais démenimis, kuriuos integruoti mokame. Paaiškinsime tatai pavyzdžiais.

$$1) \text{ Rasti integralas } F(x) = \int \left(5x^4 + \frac{e^x}{3} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx.$$

Eidami § 63 lygybe (1), turime

$$F(x) = \int \left(5x^4 + \frac{e^x}{3} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \int 5x^4 dx + \int \frac{e^x}{3} dx - \int \frac{dx}{\sin^2 x};$$

toliau, remdamiesi § 63 lygybe (2), gauname

$$F(x) = 5 \int x^4 dx + \frac{1}{3} \int e^x dx - \int \frac{dx}{\sin^2 x};$$

naudodamiesi § 64 atitinkamai formulomis 2, 5 ir 8, randame

$$F(x)=5 \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{3} \cdot e^x - (-\operatorname{ctgx}) + C = x^5 + \frac{1}{3} e^x + \operatorname{ctgx} + C;$$

taigi, $F(x)=\int \left(5x^4 + \frac{e^x}{3} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = x^5 + \frac{1}{3} e^x + \operatorname{ctgx} + C.$

$$\begin{aligned} 2) \quad \int \frac{1+x^2}{x} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + x\right) dx = \int \frac{dx}{x} + \int x dx = \lg_e x + \\ &+ \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \int \frac{x^2}{x^2+1} dx &= \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \\ &= \int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctgx} + C. \end{aligned}$$

§ 67. Integravimas naujo kintamojo įvedimu.

Dažnai, norėdami duotajį diferencialą paversti tokiu, kurio integralą mokame rasti, pakeičia kintamąjį po integralo ženklu. Kaip tatai daroma, matysime iš šių pavyzdžių.

$$1) \text{ Rasti integralas } \int \frac{xdx}{2x^2+3}.$$

Dėdami $y=2x^2+3$, randame $dy=4xdx$, iš kur $xdx=\frac{dy}{4}$, ir del to,

$$\int \frac{xdx}{2x^2+3} = \int \frac{dy}{4y} = \frac{1}{4} \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{4} \lg_e y + C.$$

Istatydami dabar atgal šioje lygybėje $2x^2+3$ vietoje y , gauname galutinai

$$\int \frac{xdx}{2x^2+3} = \frac{1}{4} \lg_e(2x^2+3) + C.$$

$$2) \quad \int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx.$$

Dėdami $y=2x$, randame $dy=2dx$, iš kur $dx=\frac{dy}{2}$; todel,

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos y dy}{2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \int \cos y dy = \frac{x}{2} + \\ &+ \frac{\sin y}{4} + C = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

Panašiuose nesudėtiniuose pavyzdžiuose paprastai kintamojo pakeitimą daro mintyje. Todel, šiame pavyzdyme, užuot statę naują raidę, galime ir taip pasielgti:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int dx + \\ &+ \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \int \frac{dx}{x^2+6x+10} &= \int \frac{dx}{1+(x+3)^2} = \int \frac{d(x+3)}{1+(x+3)^2} = \\ &= \operatorname{arctg}(x+3) + C. \end{aligned}$$

$$4) \quad \int \sqrt{a^2-x^2} dx.$$

Ivesime naują kintamąjį šia lygybe $x=a \sin v$; tada $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2 \sin^2 v}=a \sqrt{1-\sin^2 v}=\cos v$, o $dx=a \cos v dv$, ir, vad.,

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \int a^2 \cos^2 v dv = a^2 \int \cos^2 v dv.$$

Bet pavyzdyme 2 matėme, kad

$$\int \cos^2 v dv = \frac{v}{2} + \frac{\sin 2v}{4} + C;$$

todel, $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{a^2 v}{2} + \frac{a^2 \sin 2v}{4} + C = \frac{a^2 v}{2} + \frac{a^2}{2} \sin v \cos v + C.$

Išreiškė dabar y -ką kintamuoju x , t. y., dėdami $\sin v=\frac{x}{a}$, $\cos v=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$ ir $y=\arcsin \frac{x}{a}$, gauname galutinai

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

§ 68. Integravimasis dalimis.

Imkime § 33 formulą (6)

$$d(zu) = zdu + udz \dots \dots \dots \quad (a)$$

Integruodami šią lygybę, gauname

$$zu = \int zdu + \int u dz,$$

iš kur

$$\int zdu = zu - \int u dz; \dots \dots \dots \quad (1)$$

čia z ir u yra x -o funkcijos.

Lygybę (1) vadina integravimo dalimis formula. Kaip matyti, ji taikant, reikia paintegralinė funkcija išskaidyti dviem tokiais daugikliais z ir du , iš kurių antrasis yra diferencialas funkcijos, kurią rasti mokame; jei, be to, pasirodys, kad mokame rasti ir $\int u dz$, tai, vad., rasime ir ieškomajį $\int zdu$. Šit pavyzdžiai.

1) Rasti integralas $\int x \cos x dx$.

Dedame $z=x$ ir $du=\cos x dx$, iš kur

$$dz=dx \text{ ir } u=\int \cos x dx = \sin x;$$

todel, eidami formula (1), turime

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx;$$

bet

$$\int \sin x dx = -\cos x;$$

vad., galutinai $\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$.

2) $\int x \lg_e x dx$.

Dėdami $z=\lg_e x$ ir $du=x dx$, gauname

$$dz = \frac{dx}{x} \text{ ir } u = \int x dx = \frac{x^2}{2};$$

todel,

$$\int x \lg_e x dx = \frac{x^2}{2} \lg_e x - \int \frac{x^2 \cdot dx}{2 \cdot x} = \frac{x^2}{2} \lg_e x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \lg_e x - \frac{x^2}{4} + C.$$

§ 69. Geometrinė integralo reikšmė.

Tegu duota funkcija $y=f(x)$, netruki ir vienareikšmė nagrinėjamajame argumento x kitimo tarpe, ir tegu kreivoji AB yra geometrinis tos funkcijos vaizdas (10 brėž.). Imkime toje kreivojoje du tašku: vieną M , nejudamą, kurio koordinatos yra, sakysime, $OP=a$ ir $MP=f(a)$, o antrą N , kurs gali keisti savo padėti, ir kurio koordinatas pažymėsime $OQ=x$ ir $NQ=f(x)$. Kintant taško N padėciai kreivojoje, t. y., kintant x -ui, kis ir figūros $PMNQ$ ploto didumas; kintais žodžiais, tas kintamasis plotas yra x -o funkcija, kurią pažymėsime $F(x)$, taip kad

$$PMNQ=F(x) \dots \dots \dots \quad (1)$$

Duokime x -ui teigiamą prieauglių $\Delta x=QQ'$ ir išbrėžkime iš taško Q' ordinatą $NQ'=f(x+\Delta x)$. Tada naujasis plotas

$$PMN'Q'=F(x+\Delta x) \dots \dots \dots \quad (2)$$

Atėmę lygybę (1) iš lygybės (2) panariui, gausime ploto prieauglių

$$QNN'Q'=F(x+\Delta x)-F(x) \dots \dots \dots \quad (3)$$

Nutieskime iš taškų N ir N' tiesiasias NR' ir $N'R$, lygiagretes su iksų ašimi, ligi susitinkant joms taškuose R' ir R su ordinatomis $Q'N'$ ir QN . Iš brėžinio matome, kad

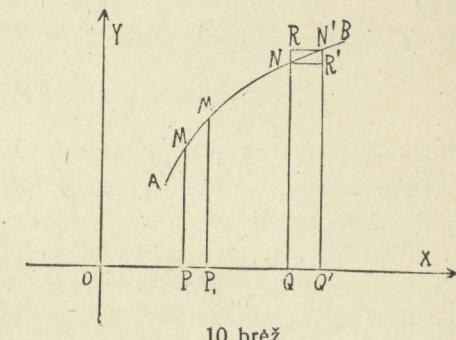
$$QRN'Q' > QNN'Q' > QNR'Q'; \dots \dots \dots \quad (4)$$

bet stačiakampio plotas $QRN'Q'=QQ'.Q'N'=\Delta x \cdot f(x+\Delta x)$, o stačiakampio plotas $QNR'Q'=QQ'.QN=\Delta x \cdot f(x)$; delei to, ir, imdamai dėmesin lygybę (3), vietoj lygybės (4) gauname

$$\Delta x \cdot f(x+\Delta x) > F(x+\Delta x) - F(x) > \Delta x \cdot f(x),$$

iš kur $f(x+\Delta x) > \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} > f(x)$.

Kai $\Delta x=0$, kairioji šios nelygybės dalis virsta riboje $f(x)$, t. y., riboje dešinioji ir kairioji dalys yra lygios; vad., ir vidurinės da-



lies riba turi būti lygi $f(x)$, ir mes gauname

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x),$$

arba

$$F'(x) = f(x),$$

iš kur, integralo apibrėžimu,

$$F(x) = \int f(x) dx \dots \dots \dots (5)$$

Formula (5) ir parodo geometrinę integralo reikšmę: *integralas reiškia didumą ploto, apriboto duotaja kreivają, dviejų jos taškų ordinatomis ir abscisu ašimi.*

Be to, formula (5) įrodo, kad bet kuri netrukioji funkcija turi integralą, nes išbrėžę kreivają, atitinkančią duotajai funkcijai, tuo pačiu išbrėšime ir plotą.

Pastaba. Darydami išvedžiojimus, laikėme funkciją $f(x)$ didėjančia taške N . Panašiu būdu lengvai įsitikiname, kad formula (5) yra teisinga ir tuo atveju, kai duotoji funkcija $f(x)$ yra mažėjanti taške N .

§ 70. Apibrėžinio integralo sąvoka.

Kaip matėme § 62, neapibrėžtinis integralas yra funkcija, kuri turi patenkinti vienintelę sąlygą, būtent, kad jos išvestinė būtų lygi paintegralinei funkcijai. Vad., jei

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

tai

$$[F(x) + C]' = f(x).$$

Dabar pareikalaukime, kad jis patenkintų ir kitą sąlygą, būtent, kad jis virstų nūlium, kai $x=a$. Ši ta sąlyga leidžia rasti integravimo pastoviosios tiekybės reikšmę. Iš tiesų, iš reikalavimo, kad

$$[F(x) + C]_{x=a} = 0,$$

gauname

$$F(a) + C = 0,$$

iš kur

$$C = -F(a);$$

tačia integralui galima duoti pavadinimas

$$F(x) - F(a),$$

Toks integralas vadinasi apibrėžiniu ir žymimas ženklu

$$\int_a^x f(x) dx,$$

kuri skaito taip: „integralas nuo a iki x “. Reikšmė a vadinas apatinę integralo ribą, o reikšmė x — viršutinę integralo ribą.

Iš pasakytojo matome, kad apibrėžtinis integralas

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a) \dots \dots \dots (1)$$

yra skirtumas tarp dviejų neapibrėžtinio integralo reikšmių, atitinkančių apatinei ir viršutinei integralo riboms.

Jeigu viršutinė integralo riba yra lygi kuriam nors pastoviam skaičiui b , tai integralas

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \dots \dots \dots (2)$$

virsta pastoviu skaičium.

Antrają integralo (2) dalį dažnai žymi ir taip:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F(x) dx,$$

kur ženklas \int_a^b vadinas įstatymo ženklu. Del to, formulą (2) galime ir šitaip parašyti:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F(x) dx \dots \dots \dots (3)$$

Pažiūrėkime dabar, kokią geometrinę reikšmę turi apibrėžtinis integralas.

§ 69 buvo išaiškinta, kad integralas $\int f(x) dx$ reiškia plotą $PMNQ$ (10 brėž.), kurio išvestinė lygi duotajai funkcijai $f(x)$.

Jei paimtumėme plotą lig tos pačios kintamosios ordinatos RQ , bet nuo kitos pastovios ordinatos, sakysime, nuo ordinatos M_1P_1 (10 brėž.), tai, atkartoję tokius pat protavimus, įsitikintume, kad naujojo ploto P_1M_1NQ išvestinė yra lygi funkcijai

$f(x)$. Vad., plotas P_1M_1NQ yra naujas duotosios funkcijos integralas, kuris skiriasi nuo senojo kai kuriuo pastoviu plotu, kurį pažymime C . Taip, apskritai, galime sakyti

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Jei taško M padėtis nustatyta, t. y., jeigu yra duotas didumas $x=a$, tai šioje formulijoje pastovusis C turi visai apibrėžtą reikšmę. Iš tiesų, ji yra teisinga bet kuriai bégamajai x -o reikšmei; vad., ji bus teisinga ir tada, kai $x=a$, t. y., kai $OQ=OP$; bet tuomet plotas $PMNQ$ pavirs nulium, ir mes gausime

$$0 = F(a) + C,$$

iš kur

$$C = -F(a);$$

vad., $\int f(x)dx = F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)dx.$

Taigi, apibrėžtinis integralas reiškia plotą, apribotą duotaja kreivaja, abscisu ašimi ir dviem ordinatom, atitinkančiom toms abscisos reikšmėms, kurios sudaro apatinę ir viršutinę integalo ribą.

Jeigu antrojo kraštinio taško N abscisa turi kai kurią apibrėžtą reikšmę $x=b$, tai ir atitinkamas ploto didumas bus visai nustatytas formula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Pavyzdžiai:

$$1) \int_2^3 3x^2 dx = \left[x^3 \right]_2^3 = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19.$$

$$2) \text{ Rasti integralas } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx.$$

Dėdami $z = \cos^2 x$ ir $du = \sin x dx$,

gauname $dz = -2\cos x \sin x dx$ ir $u = \int \sin x dx = -\cos x$;
todel, $\int \cos^2 x \sin x dx = -\cos^3 x - \int 2\cos^2 x \sin x dx = -\cos^3 x$
 $- 2 \int \cos^2 x \sin x dx,$

iš kur

$$3 \int \cos^2 x \sin x dx = -\cos^3 x,$$

arba

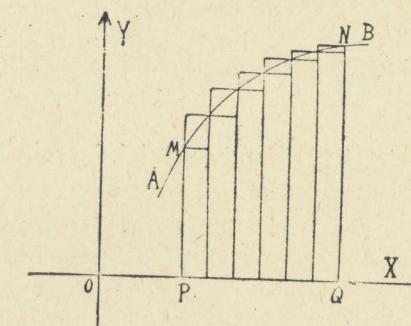
$$\int \cos^2 x \sin x dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + C;$$

vad., $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = \left[-\frac{\cos^3 x}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\cos^3 \frac{\pi}{2}}{3} + \frac{\cos^3 0}{3} = \frac{1}{3}.$

$$3) \int_0^{-\infty} e^x dx = \left[e^x \right]_0^{-\infty} = e^{-\infty} - e^0 = -1.$$

§ 71. Apibrėžtinis integralas kaip sumos riba.

Tegu AB (11 brėž.) yra kreivoji, kurios lygtys yra $y=f(x)$. Pereitame § 70 matėme, kad plotas (pažymėkime jį raide S), apribotas kreivaja, abscisu ašimi ir ordinatomis dviejų kreivo-



11 brėž.

sios taškų, kurių abscisos yra $OP=a$ ir $OQ=b$, reiškiasi taip:

$$S = \int_a^b f(x)dx \dots \dots \dots \quad (a)$$

Padalykime atkarpat PQ į n lygių dalij ir kiekvienos dalies ilgumą pažymėkime Δx . Tada dalymo taškų abscisas galime išreikšti paeiliui taip: $x_1 = a + \Delta x, x_2 = x_1 + \Delta x, \dots, x_{n-1} = x_{n-2} + \Delta x$, o atitinkamas toms abscisos kreivosios AB taškų ordinatas šiaip: $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_{n-1} = f(x_{n-1})$.

Išbrėžkime, kaip parodyta brėžinyje, n išlaukinį stačiakampį ir n vidurinių stačiakampių, kurių pagrindinės yra gautieji ilgumai Δx ir kurių viena viršunė guli kreivojoje AB . Plotas S yra didesnis už vidurinių stačiakampių plotų sumą ir mažesnis už išlaukinį stačiakampių plotų sumą. Skirtumas tarp išlaukinį ir vidurinių stačiakampių plotų sumų yra lygus (tatai nesunku pastebeti iš to paties brėžinio) skirtumui tarp pakraštinį stačiakampių plotų, t. y., jis lygus

$$f(b)\Delta x - f(a)\Delta x.$$

Kai Δx be galio mažėja, ir, vad., n be galio didėja, tas skirtumas artėja nuliui. Del to, ir skirtumas tarp ploto S ir vidurinių stačiakampių plotų sumos, n -ui didėjant, mažėja ir riboje, kai $n=\infty$, virsta nulium; kitais žodžiais pasakius, plotas S yra vidurinių (arba išlaukinių) stačiakampių plotų sumos riba, ir mes galime rašyti

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(a)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x],$$

arba, imdami dėmesin lygybę (a),

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(a)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x]. \dots (1)$$

Ši formula rodo, kad į apibrėžtinį integralą galima žiūrėti, kaip į ribų sumos, sudarytos iš paintegralinės funkcijos reikšmių, padaugintų iš argumento prieaugliaus, kai tos sumos dėmenų skaičius (tarp duotojo integralo ribų) be galio didėja.

§ 72. Plotų skaičavimo pavyzdžiai.

Anksčiau matėme (§ 70), kad plotas S , apribotas kreivajā $y=f(x)$, iksų ašimi ir dviejų kreivosios taškų ordinatomis, atitinkančiomis abscisu reikšmėms a ir b , reiškiasi apibrėžtiniu integralu

$$S = \int_a^b f(x)dx \dots \dots \dots \dots \dots \dots (a)$$

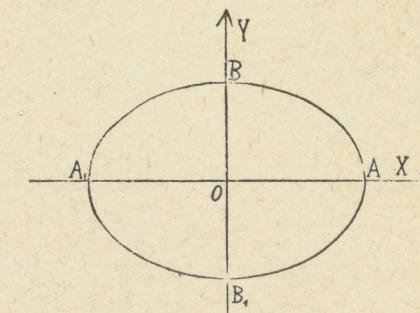
Žinodami tatai, surasime kai kurių plotų didumus.

I. Elipsio plotas.

Tegu elipsis duotas ašinėmis lygtimis (12 brėž.)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Išskaičiuosime pirma integravimui tą elipsio ploto dalį OBA , kuri guli tarp teigiamų koordinatų ašių krypčių, o paskui gau-



12 brėž.

tąjį rezultatą padauginsime iš 4. Aišku, kad tokiu atveju kreivios lygtys bus

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

o integralas reiks imti tarp ribų 0 ir a . Del to, elipsio ketvirčio plotas S išsireikš integralu

$$S = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

§ 67 pavyzdyste 4 buvo parodyta, kad neapibrėžtinis integralas

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C;$$

$$\text{vad, } S = \frac{b}{a} \left[\left(\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \right) \Big|_0^a \right] = \frac{b}{a} \left[\left(\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{a}{a} + \frac{a}{2} \sqrt{a^2 - a^2} \right) - \left(\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{0}{a} + \frac{0}{2} \sqrt{a^2 - 0} \right) \right] = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \arcsin 1 = \\ = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi ab}{4}.$$

Elipsio plotas $4S$ bus lygus

$$4S = \pi ab.$$

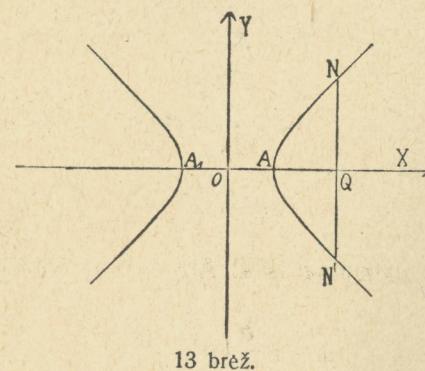
II. Hiperbolinės nuopiovos plotas.

Tegu hiperbolė duota ašinėmis lygtimis (13 brėž.)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Reikia išskaičiuoti didumas jos ploto ANN' , apriboto krei-vaja ir ordinata NN' , atitinkančia bet kuriai abscisos reikšmei x .

Rasime pirma integravimui tą ieškomojo ploto dalį ANQ , kuri guli pirmajame koordinatų ašių kampe, o paskui gautąjį



rezultatą padauginsime iš 2. Šiuo atveju kreivosios lygtys bus

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

o integralas teks imti tarp ribų a ir x . Del to, plotas S , t. y., ieškomojo ploto pusė, išsireikš integralu

$$S = \int_a^x \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{b}{a} \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}. \dots (1)$$

Rasime pirma neapibrėžtinį integralą $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$. Taikin-dami formulą integravimo dalimis, dedame

$$z = \sqrt{x^2 - a^2} \text{ ir } du = dx,$$

iš kur gauname $dz = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ ir $u = \int dx = x$;

todel,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= x \sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = x \sqrt{x^2 - a^2} - \\ &- \int \frac{(x^2 - a^2 + a^2) dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = x \sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{(x^2 - a^2) dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \\ &= x \sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2} dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \end{aligned}$$

iš kur gauname

$$2 \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \dots (2)$$

Integralą $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ rasime, įvedę naują kintamąją šia lygybe:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = t - x \dots \dots \dots (3)$$

Išspresime tas lygtis x -ui; gauname paeiliui $x^2 - a^2 = t^2 - 2tx + x^2$, $2tx = t^2 + a^2$, $x = \frac{t^2 + a^2}{2t}$; todel,

$$\sqrt{x^2 - a^2} = t - \frac{t^2 + a^2}{2t} = \frac{2t^2 - t^2 - a^2}{2t} = \frac{t^2 - a^2}{2t},$$

$$\text{o } dx = \frac{2t \cdot 2t - 2 \cdot (t^2 + a^2)}{4t^2} dt = \frac{2t^2 - t^2 - a^2}{2t^2} dt = \frac{(t^2 - a^2) dt}{2t^2},$$

vad.,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{(t^2 - a^2) \cdot 2t dt}{2t^2(t^2 - a^2)} = \int \frac{dt}{t} = \lg_e t.$$

Išreikškė dabar t iš lygybės (3) x -ui, gauname

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \lg_e(x + \sqrt{x^2 - a^2}).$$

Todel, lygybė (2), padalijus, be to, jos abidvi dali iš 2, virsta

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \lg_e(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C. \dots (4)$$

Turint neapibrėžtinio integralo reiškinį (4), nesunku išskaičiuoti plotas S iš formulas (1). Turime

$$\begin{aligned} S &= \frac{b}{a} \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{b}{a} \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \lg_e(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \right] = \\ &= \frac{b}{a} \left\{ \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \lg_e(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \right] + \frac{a^2}{2} \lg_e a \right\} = \frac{bx}{2a} \sqrt{x^2 - a^2} - \end{aligned}$$

$$-\frac{ab}{2} \lg_e(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + \frac{ab}{2} \lg_e a = \frac{bx}{2a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{ab}{2} \left[\lg_e(x + \sqrt{x^2 - a^2}) - \lg_e a \right] = \frac{bx}{2a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{ab}{2} \lg_e \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Visas hiperbolės nuopiovos ANN' plotas $2S$ bus

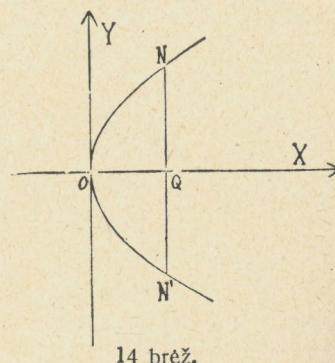
$$2S = \frac{bx}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - ab \lg_e \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

III. Parabolinės nuopiovos plotas.

Tegu parabolė duota lygtimis (14 brėž.)

$$y^2 = 2px.$$

Reikia išskaičiuoti didumas jos ploto ONN' , apriboto krei- vaja ir ordinata NN' , atitinkančia bet kuriai abscisos reikšmei x .



14 brėž.

Protaudami taip pat, kaip hiperbolės atveju, randame

$$S = \int_0^x \sqrt{2px} dx = \int_0^x \sqrt{2p} \sqrt{x} dx = \sqrt{2p} \int_0^x x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2p} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^x = \sqrt{2p} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x \sqrt{2px}.$$

Visas ieškomasis plotas $2S$ bus

$$2S = \frac{4}{3} x \sqrt{2px}.$$

Ivedę ordinatą y , atitinkančią abscisai x , gauname

$$2S = \frac{4}{3} xy.$$

§ 73 Pavyzdžiai.

Rasti šie integralai (1–54):

1. $\int x^7 dx.$
2. $\int \frac{dx}{x^6}.$
3. $\int \frac{dx}{x^3}.$
4. $\int \sqrt{Vx} dx.$
5. $\int \sqrt[4]{x^3} dx.$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}.$
8. $\int 5\sqrt[3]{x^2} dx.$
9. $\int \frac{5dx}{x\sqrt{x}}.$
10. $\int (2+3x-4x^2) dx.$
11. $\int \frac{4ax}{9(1+x^2)} dx.$
12. $\int e^{-x} dx.$
13. $\int \frac{1-2x+3x^2}{\sqrt{x}} dx.$
14. $\int \frac{x-\sqrt{x}+\sqrt{x^2}}{\sqrt{x}} dx.$
15. $\int (a-bx)^2 dx.$
16. $\int \frac{(a-bx+cx^2)^2}{x^2} dx.$
17. $\int \frac{(1-\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx.$
18. $\int \left(x^a + \frac{a}{x} + a^x + \frac{x}{a} \right) dx.$
19. $\int \sqrt{x+a} dx.$
20. $\int \frac{dx}{a-x}.$
21. $\int \frac{x}{1+x} dx.$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}.$
23. $\int \frac{3}{1-2x} dx.$
24. $\int \frac{xdx}{4+3x^2}.$
25. $\int \frac{dx}{1+(2-5x)^2}.$
26. $\int \operatorname{tg} x dx.$
27. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$
28. $\int \arcsin x dx.$
29. $\int \frac{xdx}{1+x^2}.$
30. $\int \operatorname{arctg} x dx.$
31. $\int \frac{xdx}{a^4+x^4}.$
32. $\int e^{3x} dx.$
33. $\int \sin^2 x \cos x dx.$
34. $\int \sin^3 x \cos x dx.$
35. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}.$

36. $\int (3 - \sin x)^4 \cos x dx.$

38. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}.$

40. $\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 3x + 5}{2x + 1} dx.$

42. $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx.$

44. $\int \frac{x dx}{a + bx^2}.$

46. $\int_2^3 \frac{x}{x-1} dx.$

48. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \sin x dx.$

50. $\int_0^a \frac{ax}{a^2 + x^2} dx.$

52. $\int_1^\infty e^{-x} dx.$

54. $\int_1^\infty xe^x dx.$

55. Rasti plotas, apribotas tiesiajai $y=mx+n$, abscisu ašimi, ordinatų ašimi ir ordinata $x=h$.

56. Rasti plotas, apribotas kreivaja $xy^2=36$, abscisu ašimi ir dviem ordinatom $x=4$ ir $x=9$.

57. Rasti plotas, apribotas kreivaja $y^2 = \frac{36}{1+x}$, abscisu ašimi ir dviem ordinatom $x=3$ ir $x=8$.

58. Rasti plotas, apribotas kreivaja $xy=m^2$ (lygiakraštė hiperbolė), abscisu ašimi ir dviem ordinatom $x=2$ ir $x=6$.

59. Rasti plotas, apribotas parabole $y^2=6x$ ir ordinata $x=5$.

37. $\int \sin^2(x+a) dx.$

39. $\int \frac{3x+7}{x+5} dx.$

41. $\int \frac{3x^4 - 2x^3 + 5}{3x-2} dx.$

43. $\int (a+bx)^n dx.$

45. $\int_1^2 x^4 dx.$

47. $\int_0^1 e^{1-x} dx.$

49. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

51. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx.$

53. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{4x^2 + 1}.$

Atsakymai.

§ 18.

1. 1. 2. a . 3. $\frac{1}{a}$. 4. $\frac{1}{2}$. 5. $\frac{1}{3}$. 6. ∞ . 8. $\sqrt{c^2 + d^2}$.

§ 26.

1. 0,88. 2. $f(3) > f(4)$. 3. $+\infty$. 4. $+\infty$. 5. a) -3 ; b)
2 ir 3; c) $a + (2k+1)\frac{\pi}{2}$, kur k yra bet kuris sveikasis skaičius.

§ 45.

1. $6x$. 2. $50x^4$. 3. $64x^7$. 4. 4. 5. $-\frac{5}{7}$. 6. $-5x$. 7. $2x^8$.
8. $6x(x+1)$. 9. $2x^5 - 1$. 10. $3 - 12x^8$. 11. $2x+7$. 12. $3x^2 + 8x - 5$. 13. $5x^4 + 6x^2$. 14. $2(7 - 8x)$. 15. $24x^2$. 16. $56x^8 - 114x^2 + 38x - 7$. 17. $-10x^4 - 24x^3 + 48x^2 + 84x - 14$. 18. $-\frac{1}{x^2}$.
19. $-\frac{4}{(1+x)^2}$. 20. $-\frac{11}{(x-1)^2}$. 21. $-\frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{(x^3 + 1)^2}$. 22.
 $\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2 + x + 1)^2}$. 23. $\frac{4x^5 + 7x^4 + 6x^2 - 10x - 6}{x^4}$. 24. $\frac{2x+1}{(x^2 + x + 1)^2}$.
25. $-\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2}$. 26. $\frac{2}{x}$. 27. $\lg_e x + 1$. 28. $-\frac{1}{x}$. 29. $\frac{1}{x \lg_e x}$.
30. $\frac{6}{1-x^2}$. 31. $\cos x - \sin x$. 32. $-3\sin 2x$. 33. $\sin 2x$. 34.
 $-\sin \frac{x}{2}$. 35. $-\frac{1}{3\cos^2 \frac{x}{3}}$. 36. $-\frac{x}{\sin^2 \frac{x}{2}}$. 37. $-\operatorname{tg} x$. 38. $\frac{2}{\sin 2x}$.
39. $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$. 40. $1\frac{1}{2}\sqrt{x}$. 41. $\frac{6}{7\sqrt{x}}$. 42. $\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$. 43. $\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.
44. $-\frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. 45. $\frac{2x+3}{2\sqrt[2]{x^2 + 3x + 1}}$. 46. $10x^4 + \frac{4}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{2x}$.
47. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}e$. 48. $\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. 49. $\frac{14x^2 - 6x}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$. 50. $\frac{2-\sqrt{x}}{2(1-\sqrt{x})^2}$.

51. $\frac{7x^4+5}{2x\sqrt{3x}}$. 52. $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$. 53. $\frac{x(2+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^3}$.
54. $\frac{1}{\cos x \sqrt{2 \sin 2x}}$. 55. $\frac{1}{2} \sqrt{\cos x \operatorname{ctg} x}$. 56. $\frac{1}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} 2x}}$. 57. $\sqrt{\cos 2x \operatorname{ctg} 2x}$.
58. $\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)^2}{\sqrt{1+x^2}}$. 59. $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{(2-\sqrt{x})^3}}$. 60. $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$.
61. $\frac{2}{1+4x^2}$. 62. $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. 63. $\frac{1}{\cos x}$. 64. $\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.
65. $\frac{\operatorname{ctg} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$. 66. $\frac{\operatorname{ctg} \sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$. 67. $\frac{2}{\sqrt{2x} \sin \sqrt{8x}}$.
68. $-\frac{1}{2x} \sqrt{\frac{a}{x}} \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{a}{x}}$. 69. $\frac{1}{\sin x}$. 70. $\frac{1}{2x} \sqrt{\frac{x}{a}} \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{x}{a}}$.
71. $\sin^2 x (3 - 4 \sin^2 x)$. 72. $2 \sin 2x$. 73. $-\frac{4 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 2x}$. 74. $\sin^3 x$.
75. $\frac{1}{\cos^4 x}$. 76. $-\frac{3 \sin x}{(2+\cos x)^2}$. 77. $\frac{3 \cos x}{(2 \sin x - 1)^2}$. 78. $\cos x - \sin x$.
79. $\frac{2}{x}$. 80. 0. 81. $\sin x + \cos x + \frac{2}{x}$. 82. $\frac{1}{x \lg_e x}$.
83. $-\frac{\cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \cos x}$. 84. $\frac{2}{x^2 + 1}$. 85. $\sin(30^\circ + 2x)$. 86. $e^x x^2$.
87. $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$. 88. $\frac{1+x^2-4x^4}{\sqrt{1-x^2}}$. 89. Jei rodiklinės funkcijos pagrindas yra kintamasis dydis, tai reikia imti pirma logaritmas, o paskui išvestinę. Tegu $y=x^x$. Logaritmuodami, turime $\lg_e y = x \lg_e x$. Imdami dabar abiejų dalių išvestines, turime $\frac{y'}{y} = 1 + \lg_e x$, iš kur $y' = y(1 + \lg_e x) = x^x(1 + \lg_e x)$. 90. $2x^{2x}(1 + \lg_e x)$.
91. $2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2x} \left(1 + \lg_e \frac{x}{2}\right)$. 92. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 93. $\sin \sqrt{x}$. 94. $\frac{1}{\cos x}$.
95. $\frac{1}{2(1+x^2)}$. 96. $x^{m-1} e^{-x^2} (m-2x^2)$.
97. $\frac{(3x^2-5x+1)^2 (42x^3+77x^2-67x-27)}{2\sqrt{x^2+3x+1}}$.
98. $(2x-x^2)^{3x-1} \left[\frac{2(1-x)(3x-1)}{2x-x^2} + \lg(2x-x^2)^3 \right]$. 99. $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

100. $\frac{1}{2}$. 101. $\operatorname{arctg} x$. 102. $\frac{4}{3x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \lg_e 3 \cdot \operatorname{arcsin} x \right)$.
103. $\frac{x^2}{1+x^2}$. 104. $\sqrt{a^2-x^2}$. 105. $\sqrt{x^2-a^2}$. 106. $16x^7-70x^6-6x^5+20x^4+208x^3-33x^2+10x-25$. 107. $10e^{\sin^2 x} \cos 2x$.
- § 54.**
1. min. = 2, kai $x = -1$. 2. min. = $-4\frac{1}{3}$, kai $x = -\frac{1}{3}$. 3. min. = $-\frac{1}{3}$, kai $x = \frac{2}{3}$. 4. maks. = $3\frac{1}{3}$, kai $x = -\frac{1}{3}$. 5. maks. = $6\frac{7}{9}$, kai $x = \frac{2}{3}$, min. = $3\frac{2}{9}$, kai $x = -\frac{2}{3}$. 6. min. = $-\frac{5}{4}$, kai $x = \frac{1}{2}$. 7. maks. = $4\frac{1}{2}$, kai $x = \frac{3}{4}$. 8. maks. = $\sqrt{6}$, kai $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$, min. = $\frac{\sqrt{6}}{9}$, kai $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$. 9. min. = $-5\frac{3}{8}$, kai $x = -\frac{1}{2}$. 10. Neturi nei maksimumo, nei minimumo. 11. maks. = 15, kai $x = -1$, min. = 7, kai $x = 1$. 12. maks. = $14\frac{1}{3}$, kai $x = -2$, min. = $3\frac{2}{3}$, kai $x = 2$. 13. min. = $-35\frac{1}{24}$, kai $x = \frac{1}{12}$. 14. maks. = $21\frac{1}{8}$, kai $x = \frac{7}{4}$. 15. min. = 8, kai $x = -1$. 16. min. = $1\frac{12}{13}$, kai $x = \frac{12}{13}$. 17. maks. = $40\frac{1}{3}$, kai $x = \frac{7}{6}$. 18. maks. = 5, kai $x = 0$. 19. maks. = $\sqrt{7}$, kai $x = 2$. 20. maks. = $\frac{1}{2}\sqrt{17}$, kai $x = 2\frac{1}{2}$. 21. maks. = $-\frac{2}{3}$, kai $x = -1$, min. = $\frac{2}{3}$, kai $x = 1$. 22. maks. = -5, kai $x = 0$. 23. Nėra nei maks., nei min. 24. maks. = $2(4-\sqrt{15})$, kai $x = -4 + \sqrt{15}$, min. = $2(4+\sqrt{15})$, kai $x = -4 - \sqrt{15}$. 25. min. = 0, kai $x = 0$. 26. maks. = $1\frac{1}{24}$, kai $x = 12$. 27. min. = 2, kai $x = 0$. 28. min. = 2, kai $x = 1$. 29. min. = $\frac{3}{5}$, kai $x = \frac{1}{2}$. 30. maks. = 1, kai $x = 4$, min. = 25, kai $x = 16$. 31. maks. = $\frac{(a-b)^2}{a}$, kai $x = \frac{a^2}{a-b}$, min. = $\frac{(a+b)^2}{a}$, kai $x = \frac{a^2}{a+b}$. 32. maks. = $2a+1$, kai $x = a-1$. 33. maks. = $\frac{1}{2}$, kai $x = (4n+1)\frac{\pi}{4}$, min. = $-\frac{1}{2}$, kai $x = (4n+3)\frac{\pi}{4}$, kur n yra bet kuris sveikasis skaičius. 34. maks. = -2, kai $x = (4n+3)\frac{\pi}{4}$, min. = 2, kai $x = (4n+1)\frac{\pi}{4}$, kur n

yra bet kuris sveikasis skaičius. 37. $3\sqrt{2}$ ir $3\sqrt[3]{2}$. 38. Lygiašonis. 39. Lygiašonis, kurio perimetras lygus 32 m. 40. Lygiašonis su aukštine $\frac{1}{2}a \operatorname{ctg} \frac{a}{2}$. 42. 75^0 ir 75^0 . 43. $\sqrt{2}$. 44. $r^2(3+2\sqrt{2})$. 45. Lygiašonis, jo perimetras lygus $4(3+2\sqrt{2})$. 46. Kvadratas. 47. Kvadratas. 48. Kvadratas. 49. 81 ir 81. 50. Ižambinės vidurys. 51. Viršutinė stačiakampio kraštinė dalo trikampio aukštine pusiau. 52. Sumos maks. yra $r(1+\sqrt{5})$. 53. Kvadratas. 54. Lygiakraštis, jo kraštinė yra $2\sqrt{\frac{1}{3}s^2}$. 55. Lygiakraštis. 56. Tūris $= \frac{4}{9}\pi r^3\sqrt{3}$, pagrindo spindulys $= \frac{1}{3}r\sqrt{6}$. 57. $2\pi r^2$. 58. Aukštinė $= \sqrt{\frac{2v}{\pi}}$, pagrindo spindulys $= \sqrt{\frac{v^2}{2\pi^2}}$. 59. Aukštinė $= \sqrt{\frac{6v}{\pi}}$, pagrindo spindulys $= \sqrt{\frac{9v^2}{2\pi^2}}$. 60. $2\frac{2}{3}\pi r^3$. 61. Pagrindo spindulys $= \sqrt{\frac{s^2}{3\pi^2}}$, aukštinė $= \sqrt{\frac{4s^2}{3\pi^2}}$, kur s yra šonų paviršius.

§ 61.

$$1. y=3+2\sqrt{2}. \quad 2. y-x=0, y+x=0. \quad 4. 90^0. \quad 5. x+2y=1.$$

§ 73.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{x^8}{8} + C. \quad 2. \quad -\frac{1}{5x^5} + C. \quad 3. \quad -\frac{1}{2x^2} + C. \\ 4. \quad & \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C. \quad 5. \quad \frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} + C. \quad 6. \quad \frac{3}{2}\sqrt{x^2} + C. \quad 7. \quad \frac{5}{2}\sqrt{x^2} + C. \quad 8. \\ & 3x\sqrt{x^2} + C. \quad 9. \quad -\frac{10}{\sqrt{x}} + C. \quad 10. \quad 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + C. \\ 11. \quad & \frac{4}{3}\operatorname{arctg} x + C. \quad 12. \quad -e^{-x} + C. \quad 13. \quad 2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} + C. \\ 14. \quad & \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + \frac{6}{7}x\sqrt{x} + C. \quad 15. \quad a^2x - abx^2 + \frac{b^2x^3}{3} + C. \\ 16. \quad & -\frac{a^2}{x} + b^2x + 2acx - 2ab\lg_e x - bcx^2 + \frac{c^2x^3}{3} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17. \quad & \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{18}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} - \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x} + C. \quad 18. \quad \frac{x^{a+1}}{a+1} + \operatorname{alg}_e x + \\ & + \frac{a^x}{\lg_e a} + \frac{x^2}{2a} + C. \quad 19. \quad \frac{2}{3}(x+a)\sqrt{x+a} + C. \quad 20. \quad -\lg_e(a-x) + C. \\ 21. \quad & x - \lg_e(1+x) + C. \quad 22. \quad \frac{2}{3}[(x+1)\sqrt{x+1} + x\sqrt{x}] + C. \\ 23. \quad & \lg_e \frac{1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}} + C. \quad 24. \quad \lg_e \sqrt{4+3x^2} + C. \\ 25. \quad & -\frac{1}{5}\operatorname{arctg}(2-5x) + C. \quad 26. \quad -\lg_e \cos x + C. \quad 27. \quad -\sqrt{1-x^2} + C. \\ 28. \quad & x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \quad 29. \quad \frac{1}{2}\lg_e(1+x^2) + C. \quad 30. \quad x \operatorname{arctg} x - \\ & -\frac{1}{2}\lg_e(1+x^2) + C. \quad 31. \quad \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a^2} + C. \quad 32. \quad \frac{1}{3}e^{3x} + C. \quad 33. \\ & \frac{1}{3}\sin^3 x + C. \quad 34. \quad \frac{1}{4}\sin^4 x + C. \quad 35. \quad -\frac{1}{3\sin^3 x} + C. \\ 36. \quad & -\frac{1}{5}(3-\sin x)^5 + C. \quad 37. \quad \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2(x+a) + C. \\ 38. \quad & \lg_e \sqrt{\operatorname{tg} x} + C. \quad 39. \quad 3x - 8\lg_e(x+5) + C. \quad 40. \quad \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{8}x^2 + \\ & + \frac{19}{8}x + \frac{21}{16}\lg_e(2x+1) + C. \quad 41. \quad \frac{x^4}{4} + \frac{5}{3}\lg_e(3x-2) + C. \\ 42. \quad & \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\lg_e(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C. \\ 43. \quad & \frac{1}{b(n+1)}(a+bx)^{n+1} + C. \quad 44. \quad \frac{1}{2b}\lg_e(a+bx^2) + C. \quad 45. \quad 6, 2. \\ 46. \quad & 1+\lg_e 2. \quad 47. \quad e-1. \quad 48. \quad \frac{1}{5}-\frac{\sqrt{2}}{40}. \quad 49. \quad \frac{\pi}{2}. \quad 50. \quad \frac{\pi}{4a}. \\ 51. \quad & e-1. \quad 52. \quad \frac{1}{e}. \quad 53. \quad \frac{1}{8}\pi. \quad 54. \quad e^2. \quad 55. \quad \frac{h}{2}(mh+2n). \quad 56. \\ 12. \quad & 57. \quad 12. \quad 58. \quad m^2\lg_e 3. \quad 59. \quad \frac{20\sqrt{30}}{3}. \end{aligned}$$

T u r i n y s.

I. Apie ribas.

	Pusl.
§ 1. Pastovieji ir kintamieji dydžiai	3
§ 2. Begalinės mažybės	3
§ 3. Begalinės didybės	4
§ 4. Begalinių mažybų veiksmai	5
§ 5. Begalinių mažybų eilės	8
§ 6. Ribos	9
§ 7. Pagrindiniai ribų dėsniai	11
§ 8. Sumos riba	12
§ 9. Skirtumo riba	12
§ 10. Sandaugos riba	13
§ 11. Dalmens riba	13
§ 12. Ribų metodas	14
§ 13. Apskritimo ilgumas	15
§ 14. Rutulio tūris	17
§ 15. Santykio $\frac{\sin x}{x}$ riba, kai x artėja nuliui	18
§ 16. Reiškinio $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ riba, kai n be galo didėja	18
§ 17. Naturaliniai logaritmai. Pérējimas nuo vienos logaritmų sistemos prie kitos	21
§ 18. Pavyzdžiai	23

II. Apie funkcijas.

§ 19. Argumentas ir funkcija	24
§ 20. Atskiroios funkcijų reikšmės	25
§ 21. Funkcijų lytys	25
§ 22. Funkcijų netrukumas	27
§ 23. Pagrindinės netrukiosios funkcijos ypatybės	29
§ 24. Funkcija a^x	30
§ 25. Geometrinis funkcijų vaizdavimas	32
§ 26. Pavyzdžiai	35

III. Diferencialinė skaičiuotė.

§ 27. Išvestinė funkcija	35
§ 28. Geometrinė išvestinės reikšmė	37
§ 29. Mechaninė išvestinės reikšmė	38
§ 30. Funkcijos diferencialas	39
§ 31. Pastoviosios tiekybės diferenciacivimas	40
§ 32. Funkcijų sumos ir skirtumo diferenciacivimas	40
§ 33. Funkcijų sandaugos diferenciacivimas	41
§ 34. Funkcijų dalmens diferenciacivimas	43
§ 35. Laipsnio išvestinė	43
§ 36. Rodiklinės funkcijos išvestinė	44
§ 37. Logaritmo išvestinė	45
§ 38. Tiesioginių trigonometriinių funkcijų išvestinės	46
§ 39. Sudėtinės funkcijos ir jų diferenciacivimas	47
§ 40. Laipsnio išvestinė bendruoju atveju	49
§ 41. Šaknies išvestinė	49
§ 42. Atvirkštinių funkcijų diferenciacivimas	51
§ 43. Atvirkštinių trigonometriinių funkcijų išvestinės	52
§ 44. Pagrindinių diferencialinės skaičiuotės formulų lentelė	54
§ 45. Pavyzdžiai	54

IV. Funkcijų kitimo tyrimas.

§ 46. Funkcijų didėjimas ir mažėjimas	57
§ 47. Rollio teorema	59
§ 48. Geometrinis Rolllio teoremos vaizdavimas	60
§ 49. Liagranžo teorema	61
§ 50. Geometrinis Liagranžo teoremos vaizdavimas	62
§ 51. Funkcijos maksimumo ir minimumo sąvoka	63
§ 52. Būtinoji funkcijos éjimo per savo maksimumą arba minimumą sąlyga	64
§ 53. Funkcijos maksimumo ir minimumo suradimas	65
§ 54. Pavyzdžiai	69

V. Antralaipsnių kreivųjų liečiamosios ir normalės.

§ 55. Apibréžimas	71
§ 56. Liečiamoji	71
§ 57. Normalė	72
§ 58. Elipsio liečiamoji ir normalė	72
§ 59. Hiperbolės liečiamoji ir normalė	74
§ 60. Parabolės liečiamoji ir normalė	74
§ 61. Pavyzdžiai	75

VI. Integralinė skaičiuotė.

§ 62. Neapibréžtinio integralo sąvoka	76
§ 63. Pagrindinės integralo ypatybės	77
§ 64. Pagrindinių integralinės skaičiuotės formulų lentelė	78

§ 65. Funkcijų integravimo būdai	79
§ 66. Integravimas skaidymu	79
§ 67. Integravimas naujo kintamojo įvedimu	80
§ 68. Integravimas dalimis	82
§ 69. Geometrinė integralo reikšmė	83
§ 70. Apibréžtinio integralo sąvoka	84
§ 71. Apibréžtinis integralas kaip sumos riba	87
§ 72. Plotų skaičiavimo pavyzdžiai	88
§ 73. Pavyzdžiai	93
Atsakymai	95

„VYTIES“ BENDROVÉS KNYGYNE

Sukrauti šie

Kun. Profes. Teodoro Brazio kūriniai:

1. Missa „Jézau prie manęs ateiki“. Dviem balsam. Leipcige, 1922 m. 28 pusl. - - - - - 3,50
2. Mūsų Dainelės III d. Praded. Ir vidur. mokyklų chorams. 3—4 lygiems balsams. Leipcige, 1923 m. IV ir 30 psl. - - - - - 2,50
3. Mūsų dainelės IV d. Mokytojų seminarijų, Karo mokyklų ir šiaip vyru chorams. 3—4 lygiems balsams. Leipcige, 1923 m. IV ir 30 psl. - - - - - 2,50
4. Putinieli raudonaisal. Mišram chorul. - - - - - 2,50
5. Tu berželi, tu žalias medeli. Mišram chorul. - - - - - 1,20
6. Trys liardies dainos: Muše mane vyras — Kaip pas močiutę buvau — Motule mano. 4 mišriems balsams - - - - - 1,50
7. Te Deum laudamus. 500 metų Žemaičių Vyskupijos sukaktuvėms paminėti. 4 mišriems balsams. Leipcige, 1922 m. 14 pusl. - - - - - 1,20
8. Vai gūdžiai barė motulė dukrelė. Chorul su solo sopr. - - - - - 2,-
9. Vai tu diemed, diemedėli. Mišram chorul. - - - - - 2,-
10. Vai tu sakal, sakale. Mišram chorul su solo altui arba tenorul - - - - - 2,-

Aleksandro Kačanausko muzikos kūriniai:

1. I Aatsisvelkinimas. II Lopšinė. III Oi rūta, rūta. Vyru chorui - - - - - 2,-
2. I Aš mergytė. II Aušt aušrelė. Mišram chorul - - - - - 2,-
3. I Kur bėga Šešupė. II Jungtvių malda. Mišr. chorui - - - - - 1,50
4. Močiute mano. Mišram chorul - - - - - 2,-
5. Miškas ūžia. Mišram chorul su solo - - - - - 1,50
6. I Puikus berniukas. II Tai mes žinom. Mišram chorui - - - - - 1,50
7. I Sese, sesiule. II Žalia žolelė žydėjo. Mišr. chor. - - - - - 1,50
8. I Sunku gyventi. II Jau kad mes buvom. Mišram chorui - - - - - 1,50

Be šių yra didelis pasirinkimas dar ir kitų kompozitorų įvairių muzikos kūrinlių.

Su užsakymais kreiptis: į

„Vyties“ Bendrovės Knygyną

Kaune, Rotušės Aikštė 16 Nr.

Atitaisymai.

Pusl.	eil.	Išspausdinta:	Turi būti:
7	9	iš virš. taigiamas	teigiamas
9	1	" " $2 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^{10}$
11	11	" " apsoliutiniu	absoliutiniu
16	12	" " atikinkamai	atitinkamai
17	18	" " išpjovos	išpjovos
19	10	" " $+ \frac{1}{2^{n-1}}$	$+ \frac{1}{2^{n-1}}$
21	7	ap. b.	b,
22	10	virš. lygybės (3)	lygybės (4)
25	6	ap. $=x^2 + 2xh -$	$=x^2 + 2xh - 2x$
30	12	virš. aisku	aisku
32	2	" " rodyklinę	rodiklinę
32	14	" " koordinatų	koordinatų
34	14	ap. perio-	perijo-
34	1	" brež.	brėž.
37	5	virš. $(10x - 3 + 5h)$	$(10x - 3 + 5h)$
40	7	ap. Δy	Δy ,
42	5	virš. $z \cdot \lim \Delta u$	$z' \cdot \lim \Delta u$
		$\Delta_{x=0}$	$\Delta_{x=0}$
42	2	ap. lygi 0.	lygi 1.
47	1	virš. Tangento	Tangento
47	11	ap. sudétine	sudétinė
53	1	" " $1 + ctg^2 y$	$\frac{1}{1 + ctg^2 y}$
60	4	" igrekų	iksų
74	7	virš. lygtis	lygtys
77	11	ap. reiškinis	reiškinys
79	4	virš. $\int \frac{dx}{1-x^2} =$	$\int \frac{dx}{1+x^2} =$
83	16	ap. NQ'	$N'Q'$
86	2	" " $= -\cos^3 x$	$= -\cos^3 x$

NAOKSLIŲ
MADON



002 00495995 7

„VYTIES“ BENDROVÉS KNYGYNAS

Išleido arba turi sukrautus šiuos veikalus:

Mokykloms vadovėliai.

1. *Kun. Prof. T. Brazio.* Muzikos teorija III patalsytas leidimas.
2. *Kun. Prof. T. Brazio.* Choralo mokykla, vadovėlis Dvas. Seminarjoms, ir vargoninkams.
3. *J. Ilgūno.* Buhalterijos vadovėlis I dalis.
4. *J. Ilgūno.* Buhalterijos vadovėlis II dalis.
5. *J. Ilgūno.* Komercijos korespondencijos vadovėlis.
6. *V. Ruoklo.* Chimijos vadovėlis.
7. *K. J. Skruodžio.* Religijos mokymo metodika.
8. *K. K. Čibiro.* Liturgika.
9. *A. Smetonos.* Aritmetikos teorija VII leidimas.
10. *J. Stoukaus.* Analizinės geometrijos pagrindai.

Įvairios knygos.

1. *J. Balčikonio.* vert. Brolių Grimmų pasakos I tom. su pavelkslais.
2. *J. Balčikonio.* vert. Anderseno pasakos.
3. Jaunimo dainelės, 61 daina
4. *V. Karvelėlio.* Laimės šaltis.
5. *J. Martusevičiaus.* Pamokinimai apie oro spėjimą.
6. Parlamentarizmas.
7. *A. Skinderio.* Vaistų žolynas II dal.
8. *F. v. Schillerio.* Vilius Tell. 5 vėiksmų drama.
9. *Prof. M. Turskio tr L. Jašnovuo.* Medžiams ir krūmams pažinti vadovėlis.
10. *Pr. Žadeikio.* Didžiojo karo užrašai I dal.
11. *Kun. T. Žilinskio.* Katalikų bažnyčia ir demokratizmas.

Su užsakymais kreiptis į

„Vyties“ Bendrovės Knygyną

Kaune, Rotušės Aikštė 16 Nr.

J. STOUKUS.

BEGALINIŲ MAŽYBIŲ ANALIZIO PAGRINDAI.

VADOVĖLIS AUKŠTESNISIOMS MOKYKLOMS.

Vadovėlis Šv. Min-jos Mokslo Priemonių ir Knygų Tiksrimosių Komisijos pripažintas tinkamu aukštesnisioms mokykloms (raštas 1925 m. birželio mėn. 25 d., Nr. 6586).



„VYTIES“ BENDROVĖS LEIDINYS.
KAUNAS.
1925.