DR. A. JUŠKA

MATEMATINĖS ANALIZĖS PAGRINDAI

ANALITINĖS GEOMETRIJOS, DIFERENCIALINIO IR INTEGRALINIO SKAIČIAVIMO VADOVĖLIS AUKŠTESNIAJAI MOKYKLAI

Švietimo Ministerijos Knygų ir Mokslo priemonių Tikrinimo Komisijos pripažintas tinkamu vadovėliu aukštesniajai mokyklai.
(Protokolas Nr. 449).

SAKALO BENDROVĖS LEIDINYS

Išspausdinta 2200 egz.

Akc. „Žaibo“ B-vės sp. Kaune, Duonelaičio g-vė 24. 1934 m.

AUTORIAUS ŽODIS

Paskutiniais aukštesniojo mokslo metais einami vadinamosios aukštosios matematikos mokslo pagrindai. Daugelis eina lygiagrečiai analitinės geometrijos ir diferencialinio su integraliniu skaičiavimo kursus, vieno davinių nepanaudodami antram. Nedaug laiko teturint, tuo būdu sunku suspėti tinkamai susipažinti su tais kursais. Mums todėl rodosi, kad geriau eiti išvien visi paskutinių metų matematikos dalykai, vienos šakos rezultatus panaudojant kitoms. Tuo metodu ir parašytas šis vadovėlis. Be to, turėta galvoje, kad daugumas moksleivių nėra matematikos studentai, todėl matematikas galės vietomis vadovėlyje pasigesti jam įprasto matematinio griežtumo, bet už tat neįpratusių jaunų skaitytojų jis neturėtų atbaidyti.

Sekdami savo profesorium ir žinomų tos pačios srities akademinių vadovėlių autorium Courantu, integralinio skaičiavimo kursą, pradėjome apibrėžtiniu integralu, nes taip daug vaizdžiau. Matematikos mokytojas ras ir daugiau ką-ne-ką, jam nevisai įprastą. Reikia tačiau atsiminti, kad ir matematika nėra nekintama. Šiaip vadovėlis su mokyklų programomis suderintas.

Vadovėlyje yra apsčiai ir uždavinių. Jie būtini — skaitomajam kursui tinkamiau suprasti ir įsisąmoninti. Kas norės labiau įsigilinti į šitas matematikos šakas, galės pasinaudoti Gailevičiaus ir kitų uždavinynais. Jų, žinoma, privalės ypač mokytojas.

Apskritai, vadovėlis gana konspektiškas. Bet vis dėlto šiais laikais, kada grafiškas metodas algebroje ir kitur imamas jau gana anksti vartoti, vadovėlio trumpumas, rodosi, negalės žymiai veikti jo aiškumo ir elementarumo. Atrodo, kad jis turėtų būti prieinamas ir be mokytojo pagalbos, o daugumas besimokančių dar ir ją turės.

Vadovėlio terminologija maža tesiskiria nuo įprastinės. Sąmoningai atsisakėme nuo nevykusio „begalinės mažybės“ ir jų

analizės termino. Vartojame kilmei artimesnius terminus: koordinata, abscisa, diskriminata — vietoj „koordinatės“ ir p., šalia tiesės, kreivės, elipsės, tangentės, asimptotės. Prie lotyniškų žodžių lietuvišką galūnę segėme stačiai prie šaknies, todėl gavome ekstremus vietoj ekstremumų.

Baigiant malonu padėkoti Švietimo Ministerijos recenzentui už vertingas pastabas, žymiai patobulinusias šį dalyką, vicedir. J. Kutrai, žiūrėjusiam kalbos, inž. Pr. Drąsučiui už brėžinius, „Sakalo“ bendrovei, maloniai sutikusiai dar šį sezoną tinkamai jį išleisti, ir kitiems, šiuo ar kitu padėjusiems.

Vadovėlis yra mūsų darbo Biržų gimnazijoj vaisius. Jai dėl to jį ir aukojame.

A. Juška

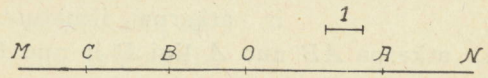
Kaunas, 1934 m. rugpiūtis.

I SKYRIUS

Koordinatų sistema. Tiesės lygtys.

§ 1. TIESĖS TAŠKAI IR SKAIČIAI.

Taško vieta tiesėje gali būti pažymėta tam tikru skaičiu. Sakysim, turime tiesę *MN* ir jos tašką *O* (1 brėž.). Be to, turime ilgio vienetą tai tiesei matuoti. Atidėliodami ilgio vienetą arba jo dalis tiesėje nuo taško *O*, galime prieiti bet kurį tiesės tašką, esantį dešinėje arba kairėje nuo *O*. Pav., taškas *A* stovi už 3,6 vienetų į dešinę nuo *O*, taškas *B* — už 2 vienetų į kairę nuo *O*. Taigi, skaičius, kurs parodo taško nuotolį nuo pasirinktojo pradžios taško, viena prasme pažymi jo vietą tiesėje. Tas nuotolis vadinamas taško a b s c i s a. Neaiškumui išvengti nuotolis į dešinę nuo pradžios taško laikomas teigiamu, į kairę — neigiamu.



1 brėž.

Galime pasielgti ir atvirkščiai: turėdami kurį nors, teigiamą ar neigiamą, skaičių, galime rasti tiesėje tą skaičių atitinkantį tašką. Pav., tame pačiame brėžiny skaičių —4,2 atitinka taškas *C*.

Tuo būdu galime visus skaičius nuo $-\infty$ ligi $+\infty$ geometriškai išreikšti taškų eile tiesėje, juos, tarsi, atvaizduoti, ir atvirkščiai: eilę taškų, stovinčių vienoje tiesėje, galime išreikšti skaičių eile. Situo skaičių ir taškų tarpusavio sąryšiu kaip tik ir remiasi analitinė geometrija.

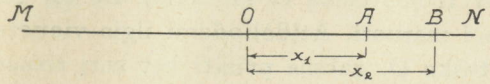
Uždaviniai: 1. Laisvai pasirinkus tiesės pradžios tašką ir vieneto ilgį, reikia rasti taškai, kurių abscisos yra $0; -\frac{1}{2}; \sqrt{2}$.

2. Duotas taškas A, kurio abscisa a; reikia rasti taškai, kurių abscisos — $2a; \sqrt{a}; \frac{\sqrt{a}}{4}$.

3. Rasti taškai, kurių abscisos yra šaknys lygčių: $2x - 3 = o$; $2x^2 + 5x + 2 = 0$; $x^2 + 4x - 3 = 0$.

§ 2. TIESĖS ATKARPŲ ILGUMAS.

Turėdami dviejų tiesės taškų abscisas, kitaip tariant, tų taškų nuotolius nuo to paties duotojo pradžios taško, galime išreikšti atkarpos ilgumą tų dviejų abscisų skirtumu. Tegu taško A abscisa yra lygi x_1, taško B abscisa x_2. Tada atkarpa AB gali būti išreikšta skaičiu $x_2 - x_1$. Panašiai kaip nuotolis nuo pradžios taško O matuojamas į abidvi puses, gali būti ir atkarpa išmatuota dviem linkmėm, sakysim, atkarpa AB nuo A ligi B ir nuo B ligi A. Ir čia pirmąją linkmę vadinsime teigiamąja, antrąją — neigiamąja. Pirmojo brėžinio BA atkarpos ilgumas yra $3{,}6 - (-2) = 5{,}6$ ir atkarpos AB ilgumas: $-2 - 3{,}6 = -5{,}6$. Iš pažymėto aišku, kad visada vienodo absoliutinio ilgumo priešingos linkmės atkarpų suma lygi nuliui:



2 brėž.

$$AB + BA = O.$$

Uždaviniai: 4. Koks atkarpos ilgumas, jei jos galinių taškų abscisos $\frac{5}{3}$ ir $\frac{1}{2}$? Koks atkarpos AB ženklas?

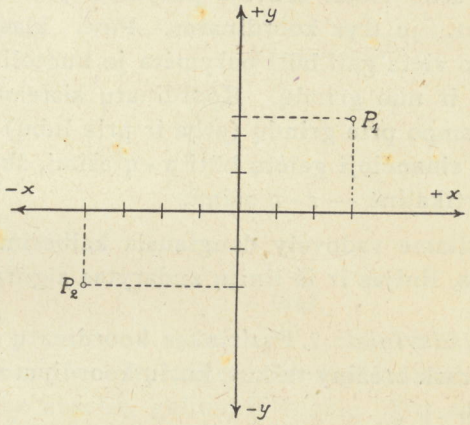
5. Rasti atkarpos P_1P_2 ilgumas, jei atitinkamos abscisos yra: 2 ir 5; —3 ir 0,5; —1 ir 0,2.

6. Įrodyti, kad atkarpos P_1P_2 vidurio abscisa yra lygi $\frac{x_1 + x_2}{2}$ kai x_1 ir x_2 yra taškų P_1 ir P_2 abscisos.

§ 3. PAVIRŠIAUS TAŠKŲ VIETOS REIŠKIMAS SKAIČIAIS.

Kaip taško vieta tiesėje gali būti išreikšta skaičiumi, žyminčiu to taško atstumą nuo duotojo taško, taip taško vieta paviršiuje gali būti išreikšta dviem skaičiais, žyminčiais jo atstumą nuo dviejų susikertančių linijų.

Plokštumoje imame paprastai dvi statmeniškai susikertančias tieses (dažniausiai horizontalinę ir vertikalinę) ir išmatuojame duotojo taško nuo jų atstumą. Gaunamieji skaičiai vadinami taško koordinatomis. Horizontalioji tiesė vadinama a b s c i s ų, arba x - ų, a š i m i, vertikalioji — o r d i n a t ų, arba y-k ų, a š i m i. Susikirtimo taškas vadinamas pradžios tašku. Atstumas nuo ordinatų ašies yra vadinamas taško a b s c i s a, o nuo abscisų ašies — o r d i n a t a. Abscisos dažniausiai žymimos x -ais, ordinatos — y -ais. Atstumai į dešinę ir aukštyn nuo ašių laikomi teigiamais, į kairę ir žemyn — neigiamais. Abscisų ir ordinatų ašys su jų susikirtimo tašku sudaro vadinamą k o o r d i n a t ų s i s t e m ą. Jei ašys statmeniškos viena antrai, tai sistema vadinama s t a č i a k a m p e arba o r t o g o n a l i n e. Pirmutinis ėmė ją vartoti matematikos reikalams *Cartesius*)*, todėl sistema vadinama dar k a r t e z i n e.



3 brėž.

3 brėžinio taškas P_1 yra pasakytas koordinatomis $x = 3$ ir $y = 2{,}5$; taško P_2 koordinatos yra $x = -4$ ir $y = -2$. Tašką su jo koordinatomis užrašome trumpai taip: $P_1(3; 2{,}5)$; $P^2(-4; -2)$; jei koordinatos pasakytos bendriniais algebros dydžiais, tai dažniausiai jos rašomos: $P_1(x_1; y_1)$; pagaliau, jei koordinatos yra nežinomos arba pasirinktinos, tai rašomos: $P(x; y)$.

M a t y t i, k a d k i e k v i e n a s p l o k š t u m o s t a š k a s d u o t o j e k o o r d i n a t ų s i s t e m o j e t u r i s a v o k o o r d i n a t a s i r a t v i r k š č i a i: k i e k v i e n ą d u o t ą d v e j e t ą s k a i č i ų a t i t i n k a t i k t a i v i e n a s p l o k š t u m o s t a š k a s.

---

*) Prancūzų filosofas ir matematikas René Descartes (1596—1650), lotyniškai Renatus Cartesius.

Kamuolio paviršiuje yra įprasta koordinatos reikšti ne ilgio, bet kampo vienetais. Žemės paviršiuje, pavyzdžiui, taško vietą pažymime jo kampiniu nuotoliu nuo pirmojo (Greenwich'o) meridiano ir nuo ekvatoriaus. Pačias koordinatas vadiname geografiniu ilgiu (atitinka x koordinatą) ir pločiu (atitinka y koordinatą).

Taško vietai erdvėje pažymėti yra reikalingi trys skaičiai, tariant, jo trys koordinatos. Pav., klasėje kabančios lempos centro vieta gali būti pažymėta jo nuotoliu nuo dviejų kambario sienų ir nuo grindų. Koordinatų sistemą galėtų atstoti trisienio kampo prie grindų (arba ir prie lubų) briaunos; išilgai kambario einančioji galėtų būti x-ų ašimi, skersai kambario — y-ų ir vertikalinė — z-ų ašimi.

Šitame vadovėly daugiausia kalbėsime tik apie plokštumos taškus, linijas ir iš linijų sudarytas figūras.

Uždaviniai: 7. Pasirinkęs koordinatų sistemą ir ilgio vienetą, surask brėžiny taškus, kurių koordinatos šios: (2;3); (-2; 0,5); ($\sqrt{2}$ ir $-\sqrt{\frac{1}{2}}$).

8. Kuriomis koordinatomis yra išreiškiami koordinatų sistemos pradžios ir ašių taškai?

9. Kurioj vietoj yra taškai: (a; b); (-a; b); (-a; -b); (a-b)?

10. Koks yra sąryšis tarp koordinatų taškų, kurie stovi vienoje ar antroje koordinatų sistemos pusiaukampinėje?

§ 4. BENDRINĖS TIESĖS LYGTYS.

Ortogonalinėje koordinatų sistemoje (4 brėž.) brėžiame kurią nors tiesią liniją per koordinatų sistemos pradžią O. Kampą, kurį sudaro tiesė su teigiamąja x-ų ašimi, vadinsime tiesės linkmės kampu ir pažymėsime α. Išbrėžtoje tiesėje yra be galo daug taškų, kurių kiekvienas turi savo abscisą ir ordinatą. Žiūrėsime, koks yra ryšys tarp abscisų ir ordinatų taškų, gulinčių vienoj ir toj pačioj tiesėj. Tuo reikalu imame tiesėje keletą bet kurių taškų A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Nuleidę statmenis nuo tų taškų ant x-ų ašies, gausime eilę panašių trikampių, kurių statiniai kaip tik yra taškų koordinatos. Iš trigonometrijos žinome, kad

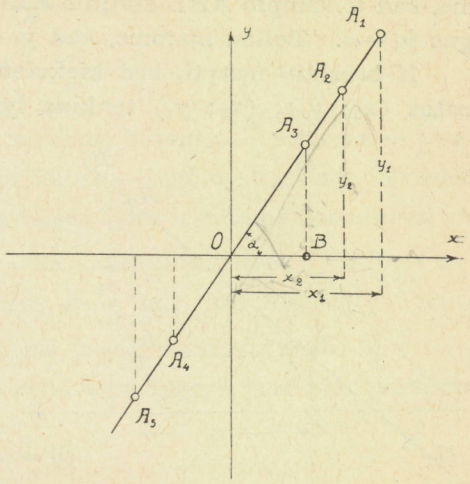
$y_1 = x_1 \operatorname{tg}\alpha$;
$y_2 = x_2 \operatorname{tg}\alpha$;
$y_3 = x_3 \operatorname{tg}\alpha$;
$y_4 = x_4 \operatorname{tg}\alpha$
ir t.t...

Apskritai imdami, galėsime parašyti, kad bet kurio tos tiesės taško koordinatos yra tarp savęs sujungtos lygtimis:

$$y = x\operatorname{tg}\alpha \qquad (1)$$

Duotos tiesės $\operatorname{tg}\alpha$ yra pastovus. Jį pažymėsime raide m. Tada lygtys (1) bus šio pavidalo:

$$y = mx \qquad (2)$$



4 brėž.

Tos lygtys rodo sąryšį tarp tiesės taškų ordinatų ir abscisų. Žinodami kurio nors taško abscisą, galime iš lygčių rasti ordinatą ir atvirkščiai. Lygtys, kurios parodo kurios nors linijos taškų koordinatų tarpusavį sąryšį, vadinamos tos linijos lygtimis. Jas tenkina tik tos linijos taškų koordinatos. Vadinasi, $y = mx$ yra tiesės, einančios per koordinatų pradžią ir turinčios linkmės kampą α ($\operatorname{tg}\alpha = m$), lygtys. Jei kitos kurios tiesės linkmės kampas yra β ir jei $\operatorname{tg}\beta = \mu$, tai tos tiesės lygtys yra:

$$y = \mu x.$$

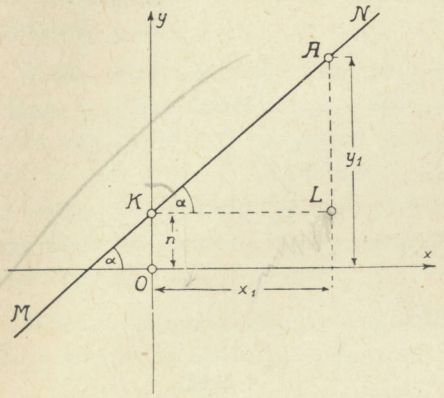
Tiesės lygtis patenkina visų tos tiesės taškų koordinatos. Jei paimtume kurį nors tašką, esantį šalia pirmosios tiesės, tai jo koordinatos, įstatytos į lygtis $y = mx$, jų netenkintų.

Dabar imsime tiesę MN (5 brėž.), einančią kuria nors linkme ir kertančią ordinatų ašį ne koordinatų sistemos pradžioje. Tiesės linkmės kampą vėl pažymėsime α, o atkarpą OK, kurią atkerta tiesė ordinatų ašyje, pažymėsime raide n. Išvedę per tašką K lygiagretę su x ašimi ir nuleidę statmenis iš tiesės taškų į x ašį, vėl gautume eilę stačių panašių trikampių, iš kurių išbrėžtas tik vienas AKL. Pažymėję taško A koordinatas x_1 ir y_1, mato-

me, kad trikampio AKL statinis KL lygus x_1 ir statinis AL lygus $y_1 - n$. Toliau matome, kad $y_1 - n = x_1 . \mathrm{tg}\alpha$.

Iš brėžinio matyti, kad kiekvieno kito tiesės taško koordinatos $(x_2; y_2)$; $(x_3; y_3)$ tenkina lygtis:

$$y - n = x . \mathrm{tg}\alpha;$$
$$y = x . \mathrm{tg}\alpha + n;$$
$$y = mx + n. \qquad (3)$$



5 brėž.

Taigi lygtys $y = mx + n$ yra tos tiesės lygtys.

Kitos kurios tiesės lygtys gali skirtis nuo šių tiktai savo linkmės kampo tangentu ir atkarpa, kurią ji atkerta ordinatų ašyje. Taigi, lygčių $y = mx + n$ koeficientai m ir n, apskritai, gali būti bet kurie skaičiai. Tik duotoje tiesėje jie yra pastovūs. Tuo tarpu x ir y visada reiškia bet kurių tiesės taškų koordinatas. Jie kintami dydžiai. Lygtys $y = mx + n$ vadinamos bendrinėmis tiesės lygtimis.

Kai tose lygtyse $n = 0$, tai jos virsta pirmiau rastomis lygtimis tiesės, einančios per koordinatų sistemos pradžią. Kai $m = 0$, tai α yra lygu 0 arba π, ir lygtys yra šio pavidalo:

$$y = n. \qquad (4)$$

Tai bus lygtys tiesės, einančios lygiagrečiai su x ašimi ir kertančios ordinatų ašyje atkarpą n. Tokios tiesės ordinatos yra pastovios ir nepareina nuo abscisų. Analogiškai

$$x = l \qquad (5)$$

yra lygtys tiesės, einančios lygiagrečiai su y ašimi ir kertančios x ašyje atkarpą l.

Pagaliau, pačių sistemos ašių lygtys gali būti parašytos $y = 0$, x ašies, ir $x = 0$, y ašies.

Bendrinės tiesės lygtys gali būti parašytos dar bendresnio pavidalo pirmojo laipsnio lygtimis su dviem kintamaisiais:

$$ax + by + c = 0. \qquad (6)$$

Iš tikrųjų, parašę tas lygtis forma

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

matome koeficientų a, b, c reikšmę, būtent, $-\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\alpha$ ir $-\frac{c}{b} = n$. Iš čia matome, kad pirmojo laipsnio lygčių su dviem kintamaisiais koeficientai apibūdina tiesės vietą ir linkmę koordinatų sistemoje. Santykis $-\frac{a}{b} = m$ dar vadinamas tiesės kampiniu koeficientu. Atkreipsim akį į tai, kad tos lygtys nenustoja savo prasmės ir tada, kai $b = O$, vadinasi, kai $-\frac{a}{b}$ ir $-\frac{c}{b}$ lygu $-\infty$, nes tuo atveju bendrinės lygtys gali būti parašytos taip:

$$ax + c = 0;$$
$$x = -\frac{c}{a}.$$

O šitos lygtys reiškia tiesę, kuri statmeniškai atkerta atkarpą $-\frac{c}{a}$ abscisų ašyje.

Įrodę, kad tiesės lygtys gali būti parašytos pavidalu

$$y = mx + n$$

arba

$$ax + by + c = 0,$$

lengvai galime dar įsitikinti, kad ir atvirkščiai, kiekvienos pirmojo laipsnio lygtys su dviem kintamaisiais geometriškai reiškia tiesę. Pavyzdžiui, lygtys

$$4x - 2y - 6 = 0$$

reiškia tiesę, kurios kampinis koeficientas yra 2 ir kuri kerta ordinatų ašyje atkarpą — 3. Iš tikrųjų tai lengva bus pamatyti, kai duotąsias lygtis parašysime bendrinių tiesės lygčių pavidalu:

$$-2y = -4x + 6;$$
$$y = 2x - 3.$$

Išsiaiškinti, ar duotas kuris nors taškas $A(x_1; y_1)$ yra duotoje tiesėje ar ne, galime, įstatydami jo koordinatas į tiesės lygtis: jei koordinatos tenkina lygtis, tai taškas yra tiesėje, jei ne — tai yra šalia jos. Pav., taškas $A(1; 1)$ yra tiesėje $y = 2x - 1$, nes $1 = 2 . 1 - 1$, o $B(2; -3)$ yra šalia jos, nes $-3 \neq 2 . 1 - 1$.

Uždaviniai: 11. Ar stovi taškai (2;—3); (—1; —4); (—2; 7); (12; 2) tiesėje $x - 5y = 2$?

12. Kuri iš tiesių $5x + 3y + 1 = 0$; $2x + 3y = 0$; $4x - 5y + 2 = 0$ eina per koordinatų pradžią?

13. Parašyti lygtys tiesės, kurios linkmės kampas $\alpha = 30^0$ ir kuri kerta y ašyje atkarpą $n = -4{,}5$.

14. Katrą ašį perkerta tiesės $2x = 3$ ir $3x + 2 = 0$. Rasti susikirtimo taškų koordinatos.

15. Rasti linkmės kampas tiesės $7x + 11y - 3 = 0$.

16. Rasti kampas, kurį sudaro tiesė $5x - 3y + 7 = 0$ su y ašimi.

17. Sudaryti lygtys tiesių, kurios kerta ordinatų ašyje atkarpą — 5.

§ 5. KITI TIESĖS LYGČIŲ PAVIDALAI.

Pirmiausia rasime lygtis tiesės, kuri kerta x ašyje atkarpą a ir y ašyje atkarpą b. Iš šešto brėžinio matyti, kad

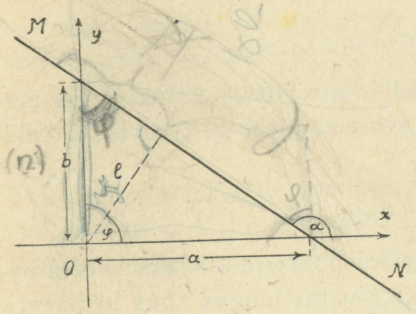
$$b = a \cdot \mathrm{tg}(180^0 - \alpha) = -\mathrm{atg}\,\alpha;$$

taigi $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{b}{a}$. Tad ieškomosios tiesės lygtis galime parašyti taip:

$$y = -\frac{b}{a} \cdot x + b$$

Padalę visus lygčių narius iš b ir perkėlę x narį į kairę pusę, gauname

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (7)$$



6 brėž.

Šios tiesės lygtys yra vadinamos ašinėmis. Atvirkščiai, norėdami rasti, kokias atkarpas kerta tiesė koordinatų ašyse, turime jos lygtis parašyti (7) lygčių pavidalu. Pav., $3x + \frac{y}{2} = 4$, kerta x ašyje atkarpą $= \frac{4}{3}$ ir y ašyje atkarpą $= 8$, nes tos lygtys yra parašomos taip: $\frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{8} = 1$.

Jei mums būtų duotas tiesės atstumas nuo koordinatų pradžios l ir kampas φ, kurį statmuo l sudaro su x ašimi (žiūr. 6 brėž.), tai tiesės lygtis gautume šitaip:

$$y = mx + n$$

$$y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot x + n; \quad \alpha = 90^0 + \varphi;$$

$$y = \frac{\sin(90^0 + \varphi)}{\cos(90^0 + \varphi)} \cdot x + n;$$

$$y = \frac{\cos\varphi}{-\sin\varphi} \cdot x + n,$$

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - n\sin\varphi = 0; \quad l = n\sin\varphi;$$

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - l = 0 \qquad (8)$$

Šitos tiesės lygtys vadinamos normalinėmis. Jos atsimintinos dėl savo artimo ryšio su išskaičiavimu taško atstumo nuo tiesės (žiūr. § 7).

Jeigu tiesė $y = mx + n$ eina per tašką $P_1(x_1; y_1)$, tai, įstatę jo koordinatas į lygtis, turime gauti lygybę

$$y_1 = mx_1 + n.$$

Atimsime panariui tą lygybę iš tiesės lygčių; jos dėl to paliks tų pačių šaknų lygtys. Nuo buvusiųjų jos tačiau skirsis tuo, kad jas būtinai tenkins taško P_1 koordinatos. Už tat tos lygtys

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (9)$$

vadinamos lygtimis tiesės, einančios per duotąjį tašką $P_1(x_1; y_1)$.

Sakysime, kad 4 brėžinio tiesė $A_1 A_5$ eina per taškus A_1 ir A_2, kurių koordinatos tebūnie $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$. Tiesės, einančios per tašką A_1, lygtys yra:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ir per tašką A_2 —

$$y - y_2 = m(x - x_2).$$

Bet iš stataus trikampio OBA_3 matyti, kad

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_3}{x_3}$$

arba

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Įstatę tą santykį į pirmąsias ir antrąsias lygtis, gauname

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

$$y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2).$$

Pagaliau, padalę tas lygtis iš $y_1 - y_2$, gauname

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} \text{ ir } \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\ ^{*)} \qquad (10)$$

Kadangi šios lygtys reiškia tą pačią tiesę ir kadangi jas būtinai tenkina taškų $A_1(x_1;\ y_1)$ ir $A_2(x_2;\ y_2)$ koordinatos, tai jos vadinamos **lygtimis tiesės, einančios per du duotus taškus.** Pav., lygtys tiesės, kuri eina per taškus $P_1(3;-2)$ ir $P_2\ (0;4)$ yra

$$\frac{y - (-2)}{-2 - 4} = \frac{x - 3}{3}$$

$$\frac{y + 2}{-6} = \frac{x - 3}{3}$$

$$y + 2x - 4 = 0.$$

Iš visų tiesės lygčių pavidalų matyti, kad tiesę apibūdina du dydžiai: 1) linkmės kampas ir atkarpa, kurią atkerta tiesė ordinatų ašyje; 2) atkarpos, atkertamos tiesės abiejose ašyse; 3) nuotolis tiesės nuo koordinatų pradžios ir tą nuotolį reiškiančio statmens linkmės kampas; 4) tiesės taškas ir linkmės kampas; 5) du tiesės taškai. Kai duota vienas kuris tų dydžių dvejetas, tai galima parašyti atitinkamos lygtys ir reikale iš jų išvesti kitoki tos pačios tiesės lygčių pavidalai. Arba, kai duotos lygtys, tai gali būti surasti tie tiesę apibūdinantieji dvejetai.

*) Šiose, kaip ir visose, proporcijose nariai gali būti tam tikru būdu sukeisti vietomis. Todėl šios lygtys dažnai dar rašomos taip:

$$\frac{y - y^1}{x - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}.$$

Uždaviniai: 18. Rasti tiesę $2x - 3y = 5$ apibūdinantieji dvejetai.

19. Parašyti lygtys tiesės, kuri eina per tašką $M(-0{,}5;-0{,}3)$ ir kerta ordinatų ašyje atkarpą $= 1{,}5$.

20. Parašyti lygtys tiesės, einančios per taškus $A(4;\ -2)$ ir $B(-4;\ 4)$ ir, be to, rasti tos tiesės kampinis koeficientas ir atkarpos, kurias kerta tiesė koordinatų ašyse.

21. Įrodyti, kad tiesės

$$ax + by + c = 0$$

nuotolis nuo koordinatų pradžios $l = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ir kampo φ, kurį sudaro tas nuotolio statmuo su teigiamąja x-sų ašimi,

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ ir } \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

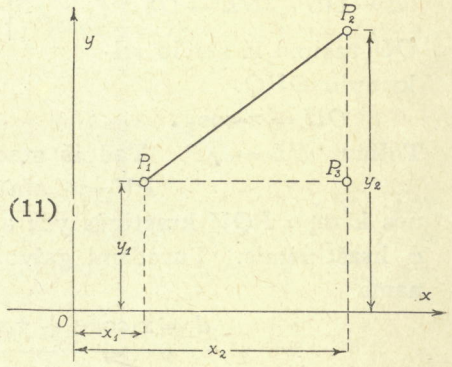
§ 6. TIESUS DVIEJŲ TAŠKŲ ATSTUMAS NUO VIENAS ANTRO.

Koordinatų sistemoje turime du taškus: $P_1(x_1;\ y_1)$ ir $P_2(x_2;\ y_2)$. Jų atstumą vienas nuo antro galima rasti iš stataus trikampio $P_1P_3P_2$. Turime

$$P_1P_2 = \sqrt{P_1P_3^2 + P_2P_3^2}.$$

Kadangi $P_1P_3 = x_2 - x_1$ ir $P_2P_3 = y_2 - y_1$ ir, be to, pažymėję dar ieškomąjį atstumą raide d, gausime:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y^2 - y_1)^2} \qquad (11)$$



7 brėž.

Sudarant koordinatų skirtumus, yra vis viena, kurio taško koordinatas imsime pirma, nes tie skirtumai keliami kvadratan. Šaknis gali būti be ženklo, kai kalbame apie absoliutinį dviejų taškų atstumą, bet galime dėti pliuso ženklą, kalbėdami apie atstumo atkarpos ilgį viena linkme, ir minuso ženklą — priešinga linkme.

Uždaviniai: 22. Rasti taškų $M(3;-5)$ ir $N(8;7)$ atstumas vienas nuo antro.

23. Rasti atstumai: 1) taškų $A(-1;4)$ ir $B(3;7)$; 2) $A(a+b;\ c+d)$ ir $B(a-b;\ c-d)$; 3) taško $P(3;\ 4)$ nuo koordinatų sistemos pradžios.

24. Rasti, skaičiuojant ir brėžiant, atkarpos vidurio koordinatos, jei galų koordinatos yra $(5;\ 7)$ ir $(5;\ -3)$.

25. Žinant tris stačiakampainio viršūnes $(4;3)$; $(7;-2)$ ir $(5;-4)$, rasti ketvirtoji.

§ 7. TAŠKO ATSTUMAS NUO TIESĖS.

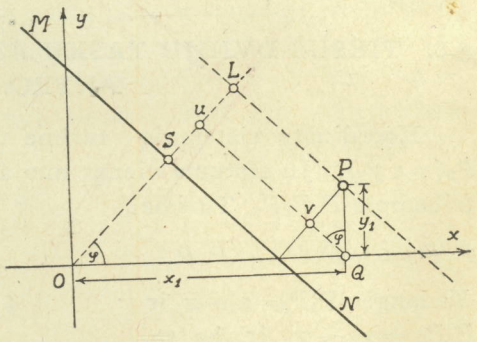
Turime (8 brėž.) tašką $P(x_1;y_1)$ ir tiesę MN normalinių lygčių pavidalo $x\cos\varphi + y\sin\varphi - l = 0$. Reikia rasti taško atstumas d nuo tiesės. Kaip matyti iš 8 brėžinio, atstumas

$$d = OL - OS,$$

nes LP yra lygiagretė su MN. Nuleidę statmenį PQ, išvesime dar tiesę $QU \parallel MN$. Tada

$$d = OU + UL - OS,$$

OU rasime iš stačio trikampio OUQ.



8 brėž.

$$OU = x_1\cos\varphi.$$

Toliau $UL = VP$. Tad iš stačiojo trikampio PVQ turime

$$PV = y_1 \sin\varphi,$$

nes kampo PQV kraštinės yra atitinkamai statmenos su kampo φ kraštinėmis. Turėdami galvoje, kad $OS = l$, pagaliau, gauname

$$d = x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - l \qquad (12)$$

Paėmę tašką P antroje tiesės pusėje tuo pat būdu gautume

$$d = -(x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - l).$$

Jei tiesė būtų buvus duota lygtimis

$$ax + by + c = o,$$

tai, remiantis 21 uždavinio įrodymu, atstumas

$$d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vadinasi, atstumo ženklas pareina nuo to, kurioje tiesės pusėje yra taškas. Abiejų reiškinių dešinioji pusė skiriasi nuo pačios tiesės lygčių kairiosios pusės tik tuo, kad vietoj tiesės bendrųjų koordinatų x, y šiame reiškinyje turime taško P koordinatas x_1y_1.

Vienintelė sąlyga, kad taškas $P(x_2;\ y_2)$ stovėtų tiesėje, yra kad jo

$$d = x_2\cos\varphi + y_2\sin\varphi - l = 0.$$

Kadangi visi tiesės taškai privalo šitos ypatybės, tai galime gauti ir šituo būdu tiesės lygtis

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - l = 0.$$

Iš viso to aišku, kuo ypatingos yra šitos tiesės lygtys „normalinėmis“ vadinamos.

Uždaviniai: 26. Duota tiesės $l = 2$, $\cos\varphi = 0{,}8$, $\sin\varphi = 0{,}6$. Koks taško $P(-3;\ 5)$ atstumas nuo tos tiesės?

27. Ar stovi taškai $(1;\ 1)$; $(-2;\ 6)$; $(3;\ -2)$ 26 uždavinio tiesėje? Kuriuose taškuose kerta toji tiesė koordinatų ašis?

28. Rasti dviejų lygiagrečių atstumas nuo viena antros: 1) $y = 9x - 1$ ir $y = 9x + 7$; 2) $3x + 2y - 5 = 0$ ir $6x + 4y + 7 = 0$.

29. Duota tiesė $4y = 3x - 2$. Parašyti lygtys tiesės, kuri eina 3 vienetų atstumu nuo jos.

§ 8. TIESIŲ SUSIKIRTIMAS.

Duotos dvi tiesės $y = mx + n$ ir $y = \mu x + \nu$. Tų dviejų tiesių susikirtimo taško koordinatos turi tenkinti abejas lygtis. Taigi susikirtimo taško koordinatas galime rasti, išsprendę tiesių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ y = \mu x + \gamma. \end{cases}$$

Gausime

$$x_1 = \frac{\gamma - n}{m - \mu} \text{ ir } y_1 = \frac{m\gamma - n\mu}{m - \mu}.$$

Susikirtimo taškas bus begalybėje, vadinasi, tiesės bus lygiagretės, kai trupmenų vardiklis

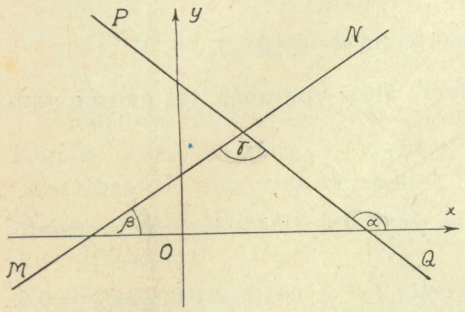
$$m - \mu = 0$$

arba

$$m = \mu \qquad (13)$$

taigi, kai abiejų tiesių linkmės kampai (ar jų tangentai) lygūs. Atvirkščiai: dvi tiesės yra lygiagretės, kai jų kampiniai koeficientai lygūs.

Rasime susikirtusiųjų tiesių kampą γ (9 brėž). Pažymėję tiesių linkmės kampus α ir β ir pasinaudoję žinoma geometrijos teorema, gauname



9 brėž.

$$\gamma = \alpha - \beta;$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta}$$

arba:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{m - \mu}{1 + m\mu} \qquad (14)$$

Kada tiesės lygiagretės, tada $\gamma = o$, vadinasi, ir $m - \mu = o$. Vėl gauname jau žinomą tiesių lygiagretiškumo žymę. Kai tiesės statmeniškos, tai $\gamma = 90^0$ ir

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{m - \mu}{1 + m\mu} = \pm\infty.$$

Iš čia $1 + m\mu = 0$, arba

$$\mu = -\frac{1}{m} \qquad (15)$$

Toks yra sąryšis kampinių koeficientų tiesių, kurios yra viena antrai statmeniškos.

Pavyzdys: Turime tieses $2y - x - 8 = 0$ ir $y - 3x - 9 = 0$. Išsprendę tų lygčių sistemą, gauname tiesių susikirtimo taško koordinatas $x_1 = -2$ ir $y_1 = 3$. Tiesių susikirtimo kampo tangentas randamas iš (14) formulės:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 . \frac{1}{2}} = \frac{2.5}{2,5} = 1.$$

iš čia turime, kad $\gamma = 45^0$.

Uždaviniai: 30. Trikampio kraštinių lygtys yra:

$$x - 5y = 1; \quad 2x + 3y = 4; \quad 5x - 3y + 2 = 0.$$

Reikia rasti to trikampio viršūnių koordinatos.

31. Ar eina tiesė $x - 3y - 7 = 0$ per tiesių $2y - 3x = 8$ ir $4x - 7y = 1$ susikirtimo tašką?

32. Rasti tiesų $6x - 7y + 5 = 0$ ir $7y = 4 + 6x$ susikirtimo taškas. Ištirti rezultatas.

33. Rasti kampai trikampio, kurio viršūnių koordinatos yra šios: (2; 5); (—1; 4); (3; 2).

34. Įrodyti, kad trikampio, kurio viršūnių koordinatos yra $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, aukštinių lygtys yra šios:

$$(x_2 - x_3)(x - x_1) + (y_2 - y_3)(y - y_1) = 0,$$
$$(x_3 - x_1)(x - x_2) + (y_3 - y_1)(y - y_2) = 0,$$
$$(x_1 - x_2)(x - x_3) + (y_1 - y_2)(y - y_3) = 0.$$

35. Rasti lygtys dviejų tiesių, kurios eina per tašką (3; —5) ir kerta tiesę $7x + 2y - 4 = 0$ kampu 45^0.

36. Dvi tiesės eina per koordinatų sistemos pradžios tašką. Jų kampinių koeficientų sandauga lygi 1. Kuri tų tiesių tarpusavio būklė?

37. Parašyti lygtys tiesės $5x + 8y = 25$ statmens, einančio per tašką $P(-4; 5)$.

§ 9. ATKARPOS DALYMAS DUOTUOJU SANTYKIU.

Reikia tiesės atkarpa AB (10 brėž.) padalyti santykiu $p : q$, kitaip sakant, reikia rasti taško C koordinatas, kad $AC : CB = p : q$. Pažymėsime A taško koordinatas x_1 ir y_1 ir B taško x_2 ir y_2. Ieškomojo taško C koordinatos tebūnie x_3 ir y_3. Išvedę CE ir AF lygiagrečiai su abscisų ir CD ir BF su ordinatų ašimis, gausime panašius trikampius ACD ir CBE. Iš jų parašysime proporcijas

$$\frac{AD}{CE} = \frac{AC}{CB}; \quad \frac{CD}{BE} = \frac{AC}{CB}$$

Įstatę į proporcijas atkarpų reikšmę, gausime

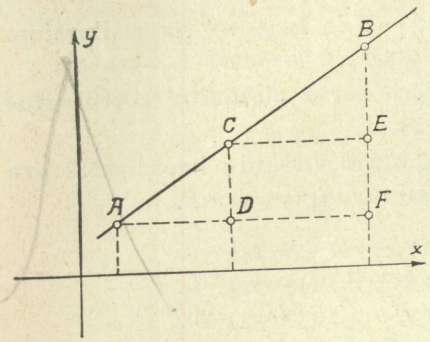
$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{p}{q} \text{ ir } \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} = \frac{p}{q}.$$

Iš gautų lygybių rasime, kad

$$x_3 = \frac{qx_1 + px_2}{p+q} \text{ ir } y_3 = \frac{qy_1 + py_2}{p+q} \ldots \qquad (16)$$

Kai $p = q$, vadinasi, kai atkarpa daloma pusiau, tai

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ ir } y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (17)$$



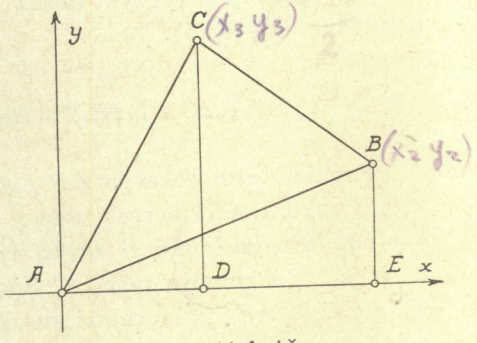
10 brėž.

Uždaviniai: 38. Atkarpa AB, kurios galų koordinatos $A(2; 3)$ ir $B(4; 5)$, padalyta į tris lygias dalis. Rasti dalybos taškų koordinatos.

39. Duotas trikampis ABC; $A(2; 3)$; $B(4; -5)$ ir $C(-3; -6)$. Rasti to trikampio pusiaukraštinių lygtys.

§ 10. TRIKAMPIO PLOTAS.

Reikia rasti plotas trikampio, kurio duotos viršūnių koordinatos. Pirmiausia nagrinėsime atsitikimą, kada viena trikampio viršūnė (11 brėž.) guli koordinatų pradžioje. Kitų dviejų viršūnių koordinatos tebūnie $B(x_2; y_2)$ ir $C(x_3; y_3)$. Nuleidę ant abscisų ašies statmenis $CD = y_3$ ir $BE = y_2$, susidarome šalia duotojo trikampio dar kelias figūras. Ieškomojo trikampio plotas gali būti rastas iš tų figūrų plotų algebrinės sumos, būtent:



11 brėž.

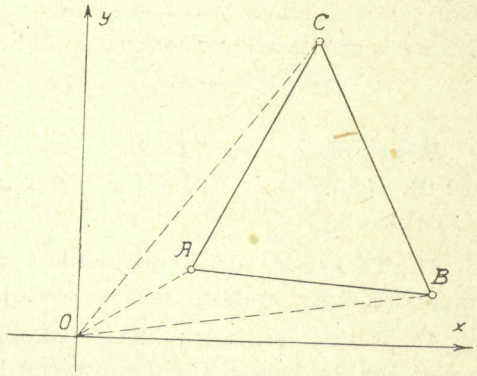
$$Q_{ABC} = Q_{ADC} + Q_{CDEB} - Q_{AEB};$$

$$Q_{ABC} = \frac{x_3y_3}{2} + \frac{(y_2 + y_3)(x_2 - x_3)}{2} - \frac{x_2y_2}{2};$$

$$Q_{ABC} = \frac{x_3y_3 + x_2y_2 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_3y_3 - x_2y_2}{2};$$

$$Q_{ABC} = \frac{x_2y_3 - x_3y_2}{2}. \qquad (18)$$

Jeigu būtume paėmę tašką C žemiau taško B, tai būtume gavę tą patį reiškinį, tik su minuso ženklu. Taigi trikampio ploto ženklas pareina nuo viršūnių eilės. Jei jų eilę sakydami, tarsi apeiname trikampį priešinga laikrodžio rodyklei linkme, tai plotas būna teigiamas, jei laikrodžio rodyklės linkme, tai — neigiamas. Paprastai imame ploto absoliutinę reikšmę.



12 brėž.

Bet kurio trikampio plotas iš visų trijų viršūnių koordinatų galima rasti įvairiais būdais. Pavyzdžiui, jei trikampio ABC, kurio viršūnių koordinatos $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$; $C(x_3; y_3)$, viršūnes sujungsime su koordinatų sistemos pradžios tašku (12 brėž.), tai ieškomojo trikampio plotą galėsime išreikšti iš algebrinės trijų trikampių plotų sumos:

$$Q_{ABC} = Q_{OBC} - Q_{OAC} - Q_{OBA}$$

Tinkamai pasinaudoję 18-tąja formule, parašysime

$$Q_{ABC} = \frac{x_2y_3 - x_3y_2}{2} - \frac{x_1y_3 - x_3y_1}{2} - \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{2}$$

$$Q_{ABC} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3}{2} \qquad (19)$$

Įsižiūrėję, kaip sudarytas gautojo reiškinio narių dvejetas, rasime tam tikrą koordinatų indeksų tvarką, dėl kurios pati formulė nebus sunku atsiminti.

Jeigu visi trys taškai stovi vienoje tiesėje, tai jie nebesudaro trikampio. Tuo atveju trikampio ploto reiškinys lygus nuliui. Tuo būdu, sąlyga, kad trys duoti taškai būtų vienoje tiesėje, yra ši:

$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 = 0.$$

Iš čia, įstatę vietoje x_3 ir y_3 bendrąsias tiesės taškų koordinatas x ir y gausime lygtis

$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y - y_2x + y_1x - x_1y = 0$$

tiesės, kuri eina per du duotus taškus. Lengva įsitikinti, kad šios lygtys visiškai nesiskiria nuo lygčių

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Uždaviniai: 40. Trikampio viršūnių koordinatos yra: $A(0;0)$, $B(-5;1)$ ir $C(3;4)$. Rasti trikampio plotas ir išaiškinti jo ženklas.

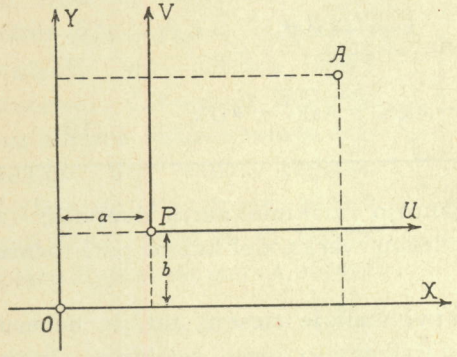
41. Taškas P_1 turi koordinatas 2 ir 3. Kurioje tiesės OP_1 (O yra koordinatų pradžios taškas) pusėje stovi taškas P_2 (4;4)?

42. Reikia įsitikinti, kad trikampiai $P_2P_3P_1$ *ir* $P_3P_1P_2$ turi tą patį ženklą, kaip $P_1P_2P_3$, tuo tarpu trikampiai $P_1P_3P_2$, $P_2P_1P_3$, $P_3P_2P_1$ — priešingą.

43. Ar stovi taškai (1; —2), (—3; 2) ir (4; —1) vienoje tiesėje?

§ 11. KOORDINATŲ SISTEMOS TRANSFORMAVIMAS.

Koordinatų sistemos vietą ligi šiolei pasirinkdavome visiškai laisvai. Pažiūrėsime, kaip pasikeičia taško koordinatos, pakeitus koordinatų sistemos vietą. Ją pakeisti galima trejopai: galima perkelti koordinatų sistemos pradžią, nekeičiant ašių linkmės; arba, pakeisti ašių linkmė, paliekant pradžios tašką vietoj, arba, pagaliau, perkelti pradžią, kartu keičiant ir ašių linkmę. Nagrinėdami šituos atvejus, žymėsime senosios koordinatų sistemos koordinatas x; y, ir naujosios u; v.



13 brėž.

1. Keliame koordinatų sistemos pradžią į naują tašką, kurio koordinatos senoje sistemoje yra (a; b). Kaip matyti iš 13 brėžinio, taško $A(x; y)$ koordinatos naujoje sistemoje yra

$$u = x - a$$
$$v = y - b$$

ir atvirkščiai $\quad x = u + a$ ir $y = v + b$. (20)

2. Pasukame koordinatų sistemą apie pradžios tašką kampu α. Išbrėžiame taško A koordinatas abiejose sistemose (14 brėž.). Pirmoje sistemoje taško A koordinatas pažymėsime (x; y) antroje (u; v). Rasime tų koordinatų sąryšį. Išvedę BD lygiagrečiai su y-kų ir BE — su x-sų ašimi, turėsime:

$x = OD - CD = OD - EB$;

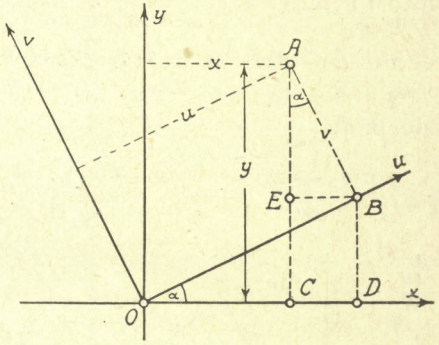
$x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$.

Toliau:

$y = AE + EC = AE + BD$

$y = v\cos\alpha + u\sin\alpha$.

Taigi senosios sistemos koordinatos yra sujungtos su naujosios koordinatomis šiomis lygtimis:



14 brėž.

$$x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$$
$$y = v\cos\alpha + u\sin\alpha \qquad (21)$$

Iš tų lygčių sistemos galime, atvirkščiai, naujas koordinatas išreikšti senomis. Tuo tikslu dauginame pirmųjų lygčių visus narius iš $\cos\alpha$ ir antrųjų — iš $\sin\alpha$. Toliau, sudėję kas sau lygčių kairiąsias ir dešiniąsias dalis, gauname

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = u(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha).$$

Iš čia

$$u = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$$

Panašiai gauname

$$v = y\cos\alpha - x\sin\alpha$$

3. Į trečiąjį koordinatų sistemos transformavimo atvejį galime žiūrėti kaip į pirmų dviejų transformavimų sumą. Dėl to be ilgų įrodymų aišku, kad šiuo kartu

$$x = u\cos\alpha - v\sin\alpha + a,$$
$$y = v\cos\alpha + u\sin\alpha + b$$

ir atvirkščiai:

$$u = x\cos\alpha + y\sin\alpha - a,$$
$$v = y\cos\alpha - x\sin\alpha - b.$$

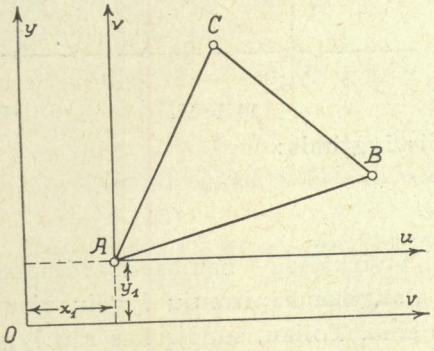
§ 12. KOORDINATŲ SISTEMOS TRANSFORMAVIMO PAVYZDYS.

Norėdami rasti trikampio plotą, kai jo viršūnių koordinatos yra $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ ir $C(x_3; y_3)$, perkelkime koordinatų sistemą į kurią nors trikampio viršūnę, sakysime, į A, nepakeisdami sistemos ašių linkmės, ir taikykime uždaviniui pirmąją ploto formulę. Vietoj buvusių viršūnių koordinatų gausime šias:

$$u_2 = x_2 - x_1, \quad v_2 = y_2 - y_1,$$
$$u_3 = x_3 - x_1, \quad v_3 = y_3 - y_1.$$

Tuo būdu

$$Q = \frac{u_2 v_3 - u_3 v_2}{2} = \frac{(x_2 - x_1).(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1).(y_2 - y_1)}{2}$$



15 brėž.

Sudauginę, sutraukę panašius narius ir juos sutvarkę, gauname tą pačią formulę, kurią buvome radę anksčiau kitu keliu, būtent:

$$Q = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3}{2}$$

Uždaviniai: 44. Koordinatų sistemoje taško P koordinatos patenkina lygtis $x + y = a$. Kaip pasikeis tos lygtys, jei koordinatų sistemos pradžią perkelsime į tašką $S(3; -2)$, palikdami senąją ašių linkmę.

45. Taško koordinatos patenkina lygtis $4x - 6y = 3$. Kaip pasikeis tos lygtys, jei koordinatų pradžią perkelsime į tašką $A(2; 3)$?

46. Taško koordinatos yra $(4; 2)$. Kaip jos pasikeis, pasukus koordinatų ašis kampu 45^0; 90^0; 180^0; 270^0?

47. Duotos lygtys $4y - 3x + 1 = 0$. Kuriuo kampu reikia pasukti koordinatų sistemos ašys, kad tos lygtys virstų lygtimis pavidalo $ax + b = 0$?

48. Kuriuo kampu reikia pasukti koordinatų ašys, kad lygtyse $2y^2 - 2xy + x^2 + 4 = 0$ neliktų kintamųjų sandaugos nario?

§ 13. ANALITINĖS GEOMETRIJOS DALYKAS.

Svarbiausias dalykas, kurį esame patyrę išeitame kurse, yra geometrinės tiesios linijos ir algebrinių pirmojo laipsnio lygčių su dviem kintamaisiais sąryšis. Matėme, kad kiekviena tiesė turi kintamųjų x ir y lygtis, kurios esti patenkinamos tik tada, kai x ir y reiškia tiesės koordinatas. Ir atvirkščiai, kiekvienos lygtys $ax + by + c = 0$ geometriškai būtinai reiškia tiesę.

Piršte peršasi klausimas, ar negalima sudaryti koordinatų sistemoje kiekvienai geometrinei linijai (pav., apskritimui, elipsei, cikloidei ir k.) dviejų kintamųjų lygčių, kurios būtų patenkinamos, įstačius vietoj kintamųjų bet kurio tokios linijos taško koordinatas. Taip pat atvirkščiai, ar neturi kiekvienos dviejų kintamųjų lygtys geometrinės linijos, patiestos plokštumoje, vaizdo.

Pirmąjį klausimą plačiau panagrinėsime trečiajame skyriuje. Tuo tarpu antrasis klausimas yra daug lengviau sprendžiamas. Kiekvienų dviejų kintamųjų x ir y lygčių x-sui galima teikti įvairios pasirinktos reikšmės ir išskaičiuoti atitinkamos y-kų reikšmės. Taip galima gauti eilė x ir y koordinatų dvejetų, kuriuos koordinatų sistemoje atitinka eilė taškų. Juos sujungę, gauname geometrinę liniją, kuri ir yra g e o m e t r i n i s d u o t ų j ų l y g č i ų v a i z d a s, arba trumpiau, l y g č i ų g r a f i k a. Pav., lygtis $3x - 2y = 1$ galima parašyti pavidalu $y = \frac{3x - 1}{2}$ duoti x-ui reikšmės 0, 1, 2, 3 ir išskaičiuoti atitinkamas y-ko reikšmes — $^1/_2$, 1, $2^1/_2$, 4. Taškus $(0; -^1/_2)$, $(1; 1)$, $(2; 2^1/_2)$ ir $(3; 4)$ sujungę, gauname tiesę. Kadangi tiesė galima išbrėžti, turint tik du jos taškus, tai vietoj keturių būtų užtekę dviejų koordinatų dvejetų. Tačiau, jei gaunami taškai nestovi tiesėje (kai lygtys ne pirmojo laipsnio arba ne algebrinės), tai reikalinga turėti daugiau koordinatų dvejetų, kad būtų matyti linijos pavidalas. Pavyzdžiu galime imti lygtis $y = x^2$, kurios duoda kreivą liniją, parabole vadinamą, arba lygtis $y = \sin x$, kurių geometrinis į abi abscisų ašies puses banguojančios linijos vaizdas yra visiems žinomas iš trigonometrijos kurso. Visą eilę pavyzdžių netrukus dar matysime antrojo skyriaus pradžioje.

A n a l i t i n ė s g e o m e t r i j o s d a l y k a s i r y r a a l g e b r o s m e t o d ų t a i k i n i m a s g e o m e t r i j o s f i g ū r ų i r j ų d a l i ų k l a u s i m a m s s p r ę s t i. Jos uždavinys -- sudaryti linijų lygtis ir iš lygčių ypatybių spręsti apie

tų linijų ir figūrų ypatybes. Pavyzdžių jau gerokai turėjome šiame pirmame skyriuje: apskaičiuodami atkarpos ilgį, dalydami ją duotuoju santykiu, sudarydami tiesių lygtis, surasdami jų susikirtimo tašką ir kampą, apskaičiuodami trikampio linijas, plotą ir kita.

UŽDAVINIAI I-ajam SKYRIUI ATKARTOTI.

49. Duoti taškai $A(7; 8)$ ir $B(4; 4)$. Parašyti lygtys tiesės, einančios per vidurį atkarpos AB ir palinkusios į abscisų ašį kampu 150^0.

50. Tiesėje $4x - 3y = 4$ duotas taškas C, kurio abscisa $5^1/_2$; parašyti lygtys tiesės, kuri eina per C ir atkerta ordinatų ašyje atkarpą — 2.

51. Rasti nuotolį dviejų tiesės $24x + 7y = 3$ taškų, iš kurių pirmo abscisa lygi 1, o antro ordinata lygi 21.

52. Dviejų tiesių lygtys $3x + 5y = 11$ ir $4y - x = 2$. Jos susikerta taške A. Rasti jo nuotolis nuo vidurio pirmos tiesės atkarpos, esančios tarp koordinatų ašių.

53. Parašyti lygtys tiesės, einančios per $A(2; -3)$ ir turinčios linkmės kampą, kuris lygus tiesių $3x - y = 12$, $x + y = 14$ susikirtimo kampui.

54. Tangentas kampo tarp dviejų tiesių yra — 2. Pirmosios tiesės lygtys yra $15x - 5y = 2$, o antroji eina per tašką $A(6; {}^1/_8)$. Rasti antrosios tiesės lygtys ir koordinatos vidurio atkarpos, esančios tarp koordinatų ašių.

55. Duoti taškai $A(-1; 10)$ ir $B(-7; 2)$; per atkarpos AB vidurį išvestas statmuo, kuris kerta ordinatų ašį taške C. Parašyti lygtys tiesės, kuri eina per C ir sudaro su abscisų ašimi kampą 30^0, ir surasti plotas $\triangle ABC$.

56. Tiesėje $8y - 15x = 9$ duoti du taškai: A su ordinata $= 18$ ir B su abscisa $= 1$. Iš taško $C(16; -5)$ nuleistas į tą tiesę statmuo, kurio pamatas D. Taškai A ir B sujungti tiesėmis su tašku E, kurio abscisa lygi atkarpai AD, o ordinata — atkarpai BD. Rasti plotas $\triangle ABE$.

57. Tiesėje $3y - 4x = 20$ duoti taškai A su abscisa $= 7$ ir B su ordinata $= 4$. Taškas C yra tiesių $8x - 9y = 19$ ir $7x + 4y = 19$ susikirtimo taškas. Rasti plotas $\triangle ABC$, kraštinė AC ir kampas, esąs prieš tą kraštinę.

58. Taško A, stovinčio tiesėje $3x + 41y = 11$, ordinata lygi nuotoliui taško $B(0{,}1; -1)$ nuo tiesės $40x - 9y = 5$. Parašyti lygtys tiesės, kuri eina per tašką A statmeniškai į tiesę $82x - 3y = 5$.

59. Iš tiesių $5x - 9y = -62$ ir $2x + 11y = 19$ susikirtimo taško nuleistas statmuo į tiesę, einančią per taškus $A(1; {}^1/_8)$ ir $B({}^1/_6; {}^3/_4)$. Šito statmens ilgis lygus ordinatai taško C, stovinčio tiesėje $7x - 2y = 12$. Parašyti lygtys tiesės, einančios per C 60^0 kampu.

II SKYRIUS

Funkcijos ir jų išvestinės.

§ 14. FUNKCIJOS SĄVOKA.

Skiriame pastovius ir kintamus dydžius. Pav., duotos tiesės linkmės kampas yra pastovus dydis, o jos taškų abscisos ir ordinatos — kintamieji dydžiai. Jei tarp dviejų ar daugiau kintamųjų dydžių yra toks ryšys, kad kintant vieniems dydžiams, būtinai kinta kiti, tai mes sakome, kad tie kiti dydžiai yra pirmųjų funkcijos. Šiuo tarpu tekalbėsime apie dvejetą kintamųjų dydžių, kurių vienas laisvai kinta ir esti vadinamas a r g u m e n t u, o antras kinta pareinamai nuo šito pirmojo. Sakome, antras yra pirmojo f u n k c i j a.

Tiesės taškų abscisos ir ordinatos pareina vienos nuo antrų, jų tarpe yra funkcijinis sąryšis. Kiekvieną abscisą, pav., atitinka tam tikra ordinata. Dėl to galima sakyti, kad tiesės taškų ordinatos yra abscisų funkcijos. Tai matyti ir iš lygčių $y = mx + n$.

Boyle'o dėsnis sako, kad uždarame inde dujų tūrio ir slėgimo sandauga yra pastovus dydis, arba, kitaip tariant, dujų tūris yra atvirkščiai proporcingas jų slėgimui. Pažymėję dujų tūrį raide v, slėgimą — p ir pastovų dydį — c, galime parašyti:

$$v.p = c,$$

arba

$$v = \frac{c}{p} \text{ [taip pat ir } p = \frac{c}{v}\text{].}$$

Sakome, uždaro indo dujų tūris (esant pastoviai temperatūrai) yra slėgimo funkcija arba ir atvirkščiai: slėgimas. yra tūrio funkcija.

Įkaitinę metalinį virbalą, kurio ilgis 0^0 temperatūroje yra l_0, ligi temperatūros t, gauname virbalo ilgį

$$l = l_0(1 + \beta t).$$

β yra turimojo virbalo pastovus dydis, vadinamasis išsiplėtimo koeficientas; virbalo ilgis ir temperatūra yra kintamieji dydžiai; virbalo ilgis yra temperatūros funkcija.

Vietoje sakinio: vienas kintamasis dydis, sakysim y, yra funkcija antro kintamojo dydžio, x-o — matematikoje yra įprasta trumpai šiaip rašyti:

$$y = f(x),\ y = F(x),\ y = \varphi(x) \text{ ir p.} \qquad (1)$$

Skaitome: y yra funkcija x-o, arba stačiai: y yra $f\,x$-o, $F\,x$-o, $\varphi\,x$-o ir t.t.

Kadangi funkcija parodo dviejų kintamųjų dydžių sąryšį, kurs gali būti išreikštas lygtimis su dviem kintamaisiais (paprastai, žymimais raidėmis x ir y), tai, atvirkščiai, į kiekvienas lygtis su dviem kintamaisiais galima žiūrėti kaip į funkciją. Iš tikrųjų, tokias lygtis dažniausiai galima taip parašyti, kad vienoje lygčių pusėje yra vienas kintamasis (funkcija), pareinąs nuo antrosios lygčių pusės, kurioje yra antras kintamasis (argumentas). Pav., lygtys $3x + 2y = 5$ ir $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$ gali būti parašytos taip:

$$y = \frac{5 - 3x}{2} \text{ ir } \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

Čia jau matyti, kad vienose ir antrose lygtyse

$$y = f(x) \text{ ir } \cos y = F(x).$$

Geometrinį funkcijos vaizdą gauname, dėdami koordinatų sistemoje argumentų reikšmes abscisų ir funkcijų reikšmes — ordinatų ašyse. Tuo būdu gautų taškų eilę sujungę tinkamiausia linija ir turime geometrinį funkcijos vaizdą. Iš plačiai vartojamo algebroje grafinio lygčių sprendimo skaitytojai jau puikiai moka tokį geometrinio vaizdavimo metodą.

Uždaviniai: 60. Parašyti tris funkcijų pavyzdžius iš fizikos.

61. Pavaizduoti grafiškai (geometriškai) funkcijas:

a) $y = x^2 + x - 6$,

b) $y = 2x^2 + 3$,

c) $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$,

d) $y = x^3 + x^2$,

e) $y = \dfrac{4x - 1}{3x - 2}$.

§ 15. TOLYDINĖS FUNKCIJOS.

Pasikeitus bet kurios funkcijos

$$y = f(x)$$

argumentui x, daugiau ar mažiau pasikeičia ir pati funkcija y. Bet kurį argumento pakitimą toliau žymėsime $\triangle x$, analogišką funkcijos pakitimą $\triangle y$. Čia $\triangle$ nėra koeficientas, bet tik simbolis lygiai kaip f lygybėj

$$y = f(x)$$

tėra funkcijos simbolis.

Sakysim, kad turime vieną funkcijos $y = f(x)$ reikšmę

$$y_1 = f(x_1).$$

Padidinę argumentą $\triangle x$, gausime antrą reikšmę

$$y_2 = f(x_1 + \triangle x).$$

Iš čia tų dviejų reikšmių skirtumas, arba funkcijos pakitimas,

$$\triangle y = y_2 - y_1;$$
$$\triangle y = f(x_1 + \triangle x) - f(x_1),$$

arba apskritai:

$$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x). \qquad (2)$$

Funkcijos pakitimo $\triangle y$ didumas pareina ir nuo funkcijos pobūdžio ir nuo argumento pakitimo $\triangle x$ didumo. Pav., funkcijos

$$y = 3x - 1$$

argumentui pasikeitus nuo 1 ligi 1,1 ($\triangle x = 0{,}1$), funkcija pakinta nuo 2 ligi 2,3, vadinasi, $\triangle y = 0{,}3$. Čia funkcijos pakitimas yra tris kartus didesnis už argumento pakitimą. Funkcijos

$$y = x^2 + 4$$

argumentui padidėjus nuo 1 ligi 1,1, gaunamas

$$\triangle y = 0{,}21,$$

o argumentui padidėjus nuo 2 ligi 2,1,

$$\triangle y = 0{,}41.$$

Jeigu funkcijos argumentą mažai tekeičiame, tai ir funkcija dažniausiai mažai tesikeičia. Mes net galime aprėžti argumen-

to kitimo ribas, norėdami, kad funkcija tesikeistų nustatytose ribose. Pavyzdžiui, norėdami, kad funkcijos

$$f(x) = x^2 + 4$$

$\triangle y$ būtų mažesnis už 0.0001, turime imti

$$(x + \triangle x)^2 + 4 - (x^2 + 4) < 0.0001;$$

iš čia

$$2x \,.\, \triangle x + \triangle^2 x - 0.0001 < 0$$

$$\triangle x < -x + \sqrt{x^2 + 0.0001}.$$

Tačiau nevisos tokios funkcijos. Yra ir tokių, kurių kad ir kaip mažai tekeistum argumentą, jos pačios kinta labai, net neaprėžtai, daug. Pav., funkcija

$$y = \frac{1}{x},$$

argumentą pakeitus iš mažo neigiamo dydžio, sakysim iš -10^{-6} į mažą teigiamą, sakysim $+10^{-6}$, pasikeičia iš -10^6 į $+10^6$, taigi net 2 milijonais. Argumentui tepasikeitus iš -10^{-12} į $+10^{-12}$, funkcija didėja nuo -10^{12} ligi $+10^{12}$ ir t.t.

Funkcijos, kurios bet kaip mažai tekinta atitinkamai mažai tepakeitus argumentą, įprasta vadinti t o l y d i n ė m i s, o tos savybės neturinčios funkcijos — netolydinėmis.

Funkcija $y = \frac{1}{x}$ yra netolydinė, kai x iš neigiamo keičiasi į teigiamą arba atvirkščiai. Funkcija $y = \operatorname{tg} x$ yra netolydinė, kai x eina per $\frac{\pi}{2}$ ir $\frac{3\pi}{2}$. Tuo tarpu $y = \sin x$ yra visada tolydinė. Griežčiau ir matematiškiau tolydinę funkciją taip formuluojame: k u r i n o r s f u n k c i j a $y = f(x)$ y r a t o l y d i n ė, j e i j o s b e t k u r i s p a k i t i m a s $\triangle y$ y r a m a ž e s n i s u ž b e t k u r į, n o r s i r l a b a i m a ž ą, d y d į ε, k a i a t i t i n k a m a i m a ž a i t e p a s i k e i č i a a r g u m e n t a s. Argumento pakitėjimas pareina nuo pasirinktojo dydžio ε didumo. Todėl, trumpai, tolydine vadinsime funkciją

$$y = f(x),$$

jei

$$\triangle y < \varepsilon,$$

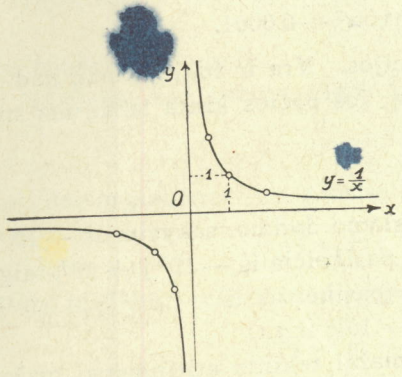
kai

$$\triangle x < \varphi(\varepsilon).$$

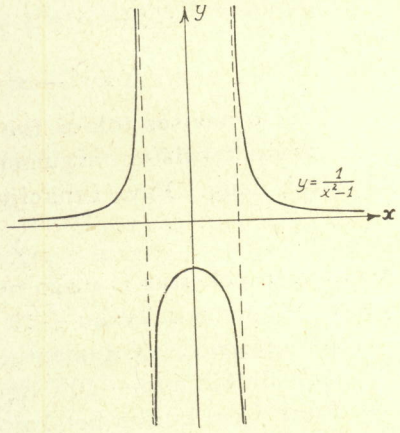
16 ir 17 brėžiniuose vaizduojame dvi funkcijas $y = \frac{1}{x}$ ir $y = \frac{1}{x^2 - 1}$. Pirmoji funkcija yra netolydinė, kai $x = 0$. Antroji

funkcija yra dviejose vietose netolydinė, būtent, kai $x = \pm 1$. Apskritai imant, algebrinės trupmeninės funkcijos yra netolydinės, kai jų vardikliai pasidaro lygūs nuliui.

Iš kitų funkcijų kaip netolydinės yra žinomos trigonometrinės tangento ir kotangento funkcijos. Jos netolydinės, kai



16 brėž.



17 brėž.

$x = n \cdot \frac{\pi}{2}$ (tangento) ir $x = n \cdot \pi$ (kotangento), kur n lygu bet kuriam sveikam teigiamam ar neigiamam skaičiui. Iš brėžinių dar matyti, kad tolydinę funkciją vaizduoja ištisinė linija, o netolydinę — nutrauktinė.

§ 16. FUNKCIJŲ KLASIFIKACIJA.

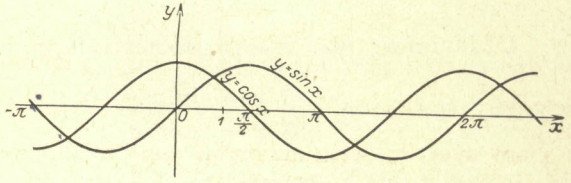
Visas matematikoje žinomomis lygtimis išreiškiamas funkcijas vadiname matematinėmis. Gamtos reiškiniuose pasitaiko funkcijų, kurių matematiškai išreikšti nemokame. Pav., oro būklė yra galų gale saulės šiliminio veikimo funkcija, bet neturime formulės suskaičiuoti ir nuspėti orui iš žinomo saulės spinduliavimo. Numanome, kad saulės įtaka čia yra tarpiška. Tokios, vien tik iš patyrimo težinomos, funkcijos yra vadinamos empirinėmis.

Visas elementarines matematines funkcijas skirstome į algebrines ir transcendentines. Kai kintamieji surišti tik sudėties, atimties, daugybos, dalybos, laipsniu kėlimo ir šak-

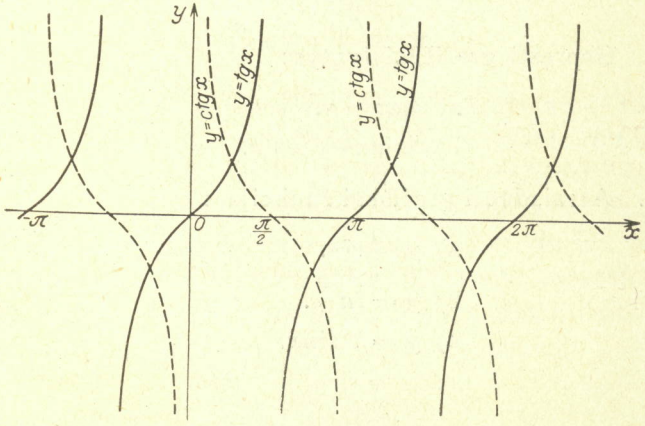
nies traukimo veiksmais, tai funkcija yra algebrinė. Algebrinės funkcijos būna sveikos, trupmeninės (kai argumentas yra nesutraukiamos trupmenos vardiklyje), racionalinės ir irracionalinės. Irracionalinės yra tokios, kurių argumentas yra po radikalo ženklu. Algebrinių funkcijų geometrinis vaizdas gali būti tiesi ir kreiva linija. Be I skyriaus pavyzdžių įsidėmėtini dar penkioliktojo paragrafo. Funkcijos $x^2 + y^2 = r^2$ geometrinis vaizdas yra apskritimas, funkcijos $y = x^3$ — vadinamoji kūbinė parabolė.

Elementarinės transcendentinės funkcijos yra trigonometrinės ir rodiklinės su logaritmiškėmis.

Trigonometrinės funkcijos yra sin$x$, cos$x$, tg$x$, ctg$x$ ir arcsin$x$, arccos$x$, arctg$x$ ir arcctg$x$. Jų kilmė ir sąvoka visiems žinoma iš trigonometrijos mokslo. Vaizduodami grafiškai šitas funkcijas, turime argumentą ir funkciją išreikšti vienodais matais, dėl to kampus matuojame nebe laipsniais, minutėmis ir sekundėmis, bet radianais. Kadangi viso apskritimo ilgis c yra $2\pi r$, tai $r = \frac{c}{2\pi} = \frac{360^0}{2\pi r} = 57^0\ 17'45''$. Brėžiniuose 18 ir 19 kartojame žinomus geometrinius sin$x$, cos$x$, tg$x$ ir ctg$x$ vaizdus.



18 brėž.



19 brėž.

Ciklometrinių funkcijų grafinis vaizdas panašus į atitinkamų goniometrinių funkcijų vaizdus.

Bendroji rodiklinė, arba eksponentinė, funkcija yra

$$y = a^x;$$

a yra pastovus teigiamas laipsnio pagrindas. Kai a lygus 0 ir 1, iš rodiklinės funkcijos belieka $y = 0$ ir $y = 1$, vadinasi, paprasti, pastovūs skaičiai. Specialinė rodiklinė funkcija yra e-funkcija:

$$y = e^x;$$

jos pagrindu yra natūralinės logaritmų sistemos pagrindas.

Pagaliau, logaritminė funkcija bendruoju pagrindu yra

$$y = \log_a x$$

ir natūralinių logaritmų pagrindu e:

$$y = \log \text{nat} x \text{ arba } y = \ln x.$$

Rodiklinių ir logaritminių funkcijų grafikas pasidaryti paliekame patiems besimokantiems.

Uždaviniai: 62. Rasti geometrinis vaizdas funkcijų:

a) $y = \sin 2x$.
b) $y = 2\sin 3x$.
c) $y = \text{tg}\frac{x}{2}$.
d) $y = \frac{1}{2}\text{ctg}x$.

63. Išspręsti grafiškai lygtys:

a) $\text{tg}x = x$.
b) $2\sin x = \cos^2 x$.

64. Atvaizduoti grafiškai funkcijas:

a) $y = e^{2x}$.
b) $y = ln\frac{x}{2}$.
c) $y = 2^x \sin x$.

§ 17. VIENAREIKŠMĖS IR DAUGIAREIKŠMĖS, TIESIOGINĖS IR ATVIRKŠTINĖS FUNKCIJOS.

Jeigu kiekvieną argumento reikšmę atitinka tik viena funkcijos reikšmė, tai funkciją vadiname vienareikšme. Tokios funkcijos yra racionalinės, trigonometrinės, goniometrinės, rodiklinės ir logaritminės funkcijos. Irracionalinės, kurios dar vadinamos grynomis algebrinėmis, funkcijos yra keliareikšmės (paprastai, vienareikšmės arba dvireikšmės, jei tekalbame apie realines funkcijų reikšmes), pav.,

$$y = \sqrt{x}$$

yra dvireikšmė funkcija, nes kiekvieną x reikšmę atitinka viena teigiama ir viena neigiama y reikšmės. Ciklometrinės, arba arcus funkcijos, yra daugiareikšmės, nes kiekvieną argumento reikšmę atitinka daugybė y reikšmių. Pav.,

$$y = \text{arc} \sin x;$$

kai $x = \frac{1}{2}$, tai $y = n \cdot \pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6}$, kur n reiškia visus sveikuosius skaičius. Paprastai kalbame apie vieną pagrindinę daugiareikšmės funkcijos reikšmę.

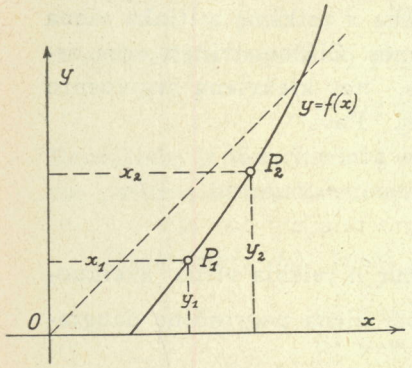
Toliau labai dažnai būna, kad, jei y yra x-so funkcija, tai ir, atvirkščiai, x gali būti y funkcija, trumpiau sakant, jei

$$y = f(x), \text{ tai ir } x = \varphi(y).$$

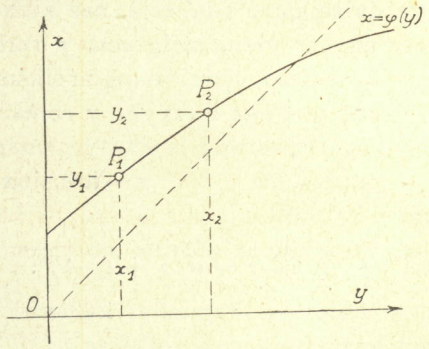
Pav., Boyle'o dėsnis: slėgimas yra tūrio funkcija, arba: tūris yra slėgimo funkcija. Taip pat tiesės taškų ordinatos yra abscisų funkcijos, arba ir atvirkščiai: abscisos yra ordinatų funkcijos. Pirmąsias funkcijas pavadinę tiesioginėmis, antrąsias vadinsime atvirkštinėmis. Tuo būdu irracionalinės funkcijos yra racionalinių, aukštesnio negu pirmojo laipsnio, funkcijų atvirkštinės funkcijos. Be to, ciklometrinės funkcijos yra atvirkštinės goniometrinių, logaritminės — rodiklinių. Pavyzdžiai:

tiesioginės funkcijos:	atvirkštinės funkcijos:
$y = x^2 + 1$	$x = \sqrt{y - 1}$
$y = x^2 - x + 2$	$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2 + y}$
$y = \sin x$	$x = \text{arc} \sin y$
$y = \text{tg} x$	$x = \text{arc tg} y$
$y = a^x$	$x = \log_a y$

Iš dedamų brėžinių matyti, kad geometrinis atvirkštinės funkcijos vaizdas yra, tarsi, veidrodinis tiesioginės funkcijos grafikos atvaizdas, stovint veidrodžiui stataus ašių kampo pusiaukampinėje. 20 brėž. vaizduoja $y = f(x)$, o 21 — atitinkamą atvirkštinę funkciją $x = \varphi(y)$.



20 brėž.



21 brėž.

Uždaviniai: 65. Padaryti tiesioginių ir atvirkštinių funkcijų vaizdai:

a) $y = x^2 - 4$.
b) $y = \sin x$.

66. Atvaizduoti funkcijas:

a) $y = \sqrt{1 + 2x}$.

b) $y = x\sqrt{1 - x^2}$.

c) $y = \frac{e^x}{x}$

d) $y = \frac{\ln x}{2}$.

§ 18. FUNKCIJOS RIBOS SĄVOKA.

Imkime skaičių eilę

$$a_n = \frac{1}{n},$$

kur n gali reikšti visus sveikus teigiamus skaičius. Matyti, kad juo didesnis bus n, juo mažesnis bus skaičius $\frac{1}{n}$; tačiau toji trupmena niekuomet nebus lygi nuliui. Tik skirtumas tarp trupmenos ir 0 kas kartas bus mažesnis, didėjant n. Kad ir kaip mažą skaičių ε paimtume, trupmena $\frac{1}{n}$ galės būti mažesnė už tą skaičių, jei tik užtenkamai didelį imsime skaičių n. Todėl mes sakome, kad skaičių eilė

$$a_n = \frac{1}{n}$$

eina, artėja, konverguoja į 0, kai n neaprėžtai didėja. Nulis yra tos skaičių eilės riba, kurios ji niekuomet nepereina. Lotyniškai riba vadinasi limes, dėl to pažymėtąją skaičių eilės savybę taip trumpai išreiškiame:

$$\lim_{n \to \infty} a_n \to 0,$$

arba dažniau,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Skaitome: limes a_n yra 0, kai n eina į begalybę.

Jei skaičių eilėje

$$a_n = \frac{1}{n},$$

n neaprėžtai mažės, pasilikdamas teigiamas, tai pati skaičių eilė neaprėžtai didės; ji galės būti didesnė už bet kurį labai didelį skaičių M, jei tik n bus užtenkamai mažas. Tad

$$\lim_{n \to 0} a_n = \infty.$$

Begalybės ženklas ∞ nereiškia kokio nors skaičiaus, bet yra tik simbolis, kad kalbamoji riba yra neaprėžto didumo.

Kalbėdami apie funkcijas, taip pat sakome, kad jos turi ribą a, kai x-ui artėjant į tam tikrą dydį, skirtumas $/a - f(x)/ < \varepsilon$, nors ε ir visai būtų mažas. Pav.,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty\ ; \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Panagrinėsime keletą ribų pavyzdžių:

1. $$y = a + bx; \quad \lim_{x \to \infty} y = \infty\ .$$

Kadangi a ir b yra pastovūs dydžiai, tai, neaprėžtai didėjant x taip pat neaprėžtai didėja ir y.

2. $$y = (1 + a)^x\ ; \quad \lim_{x \to \infty} y = \infty\ ,$$

nes pagal Newtono formulę

$$y = 1 + ax + \frac{x(x-1)}{2} a^2 + \ldots\ldots > 1 + ax;$$

$$\lim_{x \to \infty} (1 + ax) \to \infty, \text{ tad ir } \lim_{x \to \infty} (1 + a)^x = \infty \qquad (3)$$

3. $$y = \frac{x^2 - 1}{x^2}\ ; \quad \lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

$$\lim_{x \to 0} y = -\infty.$$

4. $$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

5. $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1.$$

6. $$\lim_{x \to \infty} \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{x + 1 + \frac{1}{x}} = 0.$$

7. $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + 1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \infty.$$

8. $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

9. $$y = a^x; \quad \lim_{x \to \infty} y = ?$$

Ši funkcija turi trejopą ribą, žiūrint koks yra pagrindas, būtent, didesnis, lygus arba mažesnis už vienetą:

1) $a > 1$, sakysime $a = 1 + p$; $a^x = (1 + p)^x > 1 + px$
$\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty} (1 + p)^x = \infty$, nes $\lim_{x \to \infty} (1 + px) = \infty$

2) $a = 1$; $y = 1^x = 1$ $\lim_{x \to \infty} y = 1$

3) $0 < a < 1$, tad galime parašyti $a = \frac{1}{1 + p}$, taigi

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{1 + p}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{(1 + p)^x} = 0, \text{ nes vardiklio riba yra } \infty.$$

Rodiklinės funkcijos, kai pagrindas neigiamas, čia nenagrinėsime.

Uždaviniai: 67. Rasti ribas:

a) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x + 7}{x + 1}$$

b) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

c) $$\lim_{x \to 8} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^3 - 64}$$

d) $$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x - 2}}$$

e) $$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x - 2}}$$

§ 19. NATŪRALINIŲ LOGARITMŲ PAGRINDAS.

Geru ribos pavyzdžiu yra begalinės mažėjančios geometrijos progresijos narių suma. Pav., mažėjančios progresijos

$$1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ \ldots\ldots\ldots,\ q^n$$

narių suma yra lygi

$$S = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Kadangi $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, tai begalinės mažėjančios progresijos narių sumos riba yra:

$$\lim_{n\to\infty} S = \frac{1}{1-q} \qquad (4)$$

Šituo pasinaudodami, įrodysime, kad reiškinys

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

be galo didėjant skaičiui n, turi tam tikrą ribą, kurią žymime raide e ir kurią imame natūralinės logaritmų sistemos pagrindu. Pasinaudodami Newtono binomo formule, gauname

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n!}\cdot\frac{1^{*)}}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (5)$$

Dešinėje esanti suma d i d ė j a, d i d ė j a n t s k a i č i u i n, nes visi sumos nariai yra teigiami. Kadangi skliaustuose esantieji nariai yra mažesni už vienetą, tai juos atmetę gautume naują sumą, kuri būtų didesnė už $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, taigi

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}.$$

Savo eile dešinėje šios nelygybės pusėje esanti suma yra mažesnė už narių sumą geometrijos progresijos, kurios visi nariai gali būti sudaryti iš duotos sumos narių, pakeičiant dvejetais visus skaičius, kurie didesni už 2:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

Parašytos progresijos narių sumos, be galo didėjant narių skaičiui n, riba yra:

$$\lim_{n\to\infty} S = 1 + \frac{1}{1-q} = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

Taigi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3. \qquad (5^*)$$

*) Rašome n! vietoj 1. 2. 3. 4. . . . n. Reikia skaityti: n fakultetas.

Esame įrodę, kad monotoniškai didėjąs reiškinys $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ didėjant n, pasilieka visada mažesnis už 3, vadinasi, turi ribą. Toji riba, kaip matyti iš (5), yra didesnė už 2. Ji yra įprasta žymėti raide e. Apytikrę reikšmę galime rasti, išskaičiavę $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, kai n užtenkamai didelis, būtent, $e = 2{,}71828\ldots$ Dėl ko ši riba paimta natūralinių logaritmų pagrindu, paaiškės vėliau (§ 29).

§ 20. SKAIČIUS π.

Ribų metodo taikinimas dar yra žinomas iš geometrijos kreivinių figūrų ilgio, ploto ir tūrio skaičiavimų. Iš ten žinome, kad apskritimo ilgio santykis su diametru yra pastovus dydis, kurį žymime raide π. Į π galima būtų taip pat žiūrėti kaip į plotą skritulio, kurio spindulys lygus 1. Norėdami apskaičiuoti π, turime žinoti arba apskritimo ilgį arba skritulio plotą. Vieną ir kitą galime rasti, įrašydami arba aprašydami taisyklinguosius daugiakampius. Jų kraštinių skaičių didindami, gauname figūras, kurios vis mažiau ir mažiau besiskiria nuo paties apskritimo arba skritulio. Todėl pažymėję, pav., tokio daugiakampio plotą Q_n, kur n yra kraštinių skaičius, galime parašyti

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \pi. \qquad (6)$$

Plotą įrašyto taisyklingo daugiakampio, kurio kraštinių skaičius yra n, galima lengvai sužinoti, suskaldžius daugiakampį į n trikampių, kurių viršūnės yra apskritimo centre. Visų tokių trikampių plotų suma yra

$$Q = \frac{n\sin\frac{2\pi}{n}}{2} = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Imdami vis didesnį ir didesnį kraštinių skaičių, galime vis tiksliau apskaičiuoti skritulio plotą, vadinasi, ir π. Tad

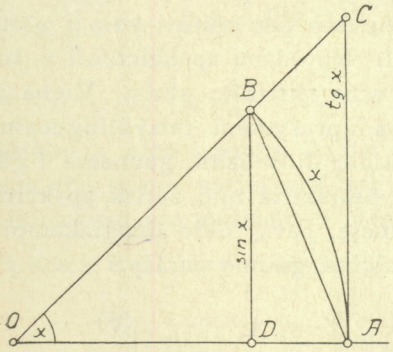
$$\pi = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right).$$

Uždaviniai:. 69. Apytikriai apskaičiuoti e ir π, imant n užtenkamai didelį, pav., $n = 100$, 360 ir t.t. . .

§ 21. TRIGONOMETRINĖS FUNKCIJOS IR ARGUMENTO SANTYKIO RIBOS PAVYZDYS.

Rasime ribą $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, kai $x \to 0$. Įstatę $x = 0$ į pačią funkciją, atsakymo negautume, nes $\frac{0}{0}$ yra neapibrėžtas reiškinys. Tačiau to santykio ribą galime rasti tokiu būdu: iš 22 brėžinio matyti, kad plotas

$$Q_{\triangle BOA} < Q_{sekt.\ BOA} < Q_{\triangle COA}.$$



22 brėž.

Pažymėję $r = 1$, gausime šią tų plotų nelygybę:

$$\sin x \cdot x < x < \operatorname{tg} x,$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

arba

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Iš čia matyti, kad $\frac{\sin x}{x}$ yra didesnis už $\cos x$, bet mažesnis už 1. Kadangi $\cos x$ eina didyn, mažėjant x, ir kadangi $\lim \cos x = 1$, tai ir $\frac{\sin x}{x}$ skirsis juo mažiau nuo vieneto, juo mažesnis bus x, vadinasi,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (7)$$

Taigi, kai kampas x eina į nulį, $\sin x$ gali būti pakeistas x. Praėjusiame paragrafe turėjome, kad įrašyto į apskritimą taisyklingo daugiakampio plotas

$$Q_n = \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}, \quad \text{tad} \lim_{n \to \infty} Q_n = \frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} = \pi$$

§ 22. SKAIČIAVIMAS SU RIBOMIS.

Beveik savaime yra aišku, kad elementariniai sudėties, atimties, daugybos ir dalybos veiksmai su ribomis gali būti atlikti kaip su paprastais skaičiais. Vadinasi, jei

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

ir

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = b,$$

tai

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) \mp \varphi(x)] = a \mp b, \qquad (8)$$

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) \cdot \varphi(x)] = ab, \qquad (9)$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a}{b} \qquad (10)$$

Paskutinės trys lygybės rodo, kad yra vistiek, ar mes pirma atliksime veiksmus su funkcijomis ir paskui ieškosime ribos, ar mes pirma imsime funkcijų ribas ir paskui atliksime tuos pačius veiksmus su ribomis. Parašytąsias tris lygybes galime įrodyti metodu, kuris matyti iš šio 9 lygybės įrodymo:

jei $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$ ir $\lim_{x \to 0} \varphi(x) = b$, tai $/a - f(x)/ < \varepsilon$ ir $/b - \varphi(x)/ < \varepsilon$. Paėmę kurį nors dydį $\iota < \varepsilon$, *galime* parašyti

$$f(x) + \iota = a \text{ ir } \varphi(x) + \iota = b;$$

sudauginę kas sau lygybių kairiąsias ir dešiniąsias puses, gauname

$$f(x) \cdot \varphi(x) + \iota \cdot f(x) + \iota \cdot \varphi(x) + \iota^2 = ab$$

Kadangi $\lim_{x \to \infty} \iota = 0$, tai

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{\substack{x \to \infty \\ \iota \to 0}} [f(x) \cdot \varphi(x) + \iota \cdot (x + \iota^2] = ab$$

Pav.: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{x} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \to 0} \cos x = 2$

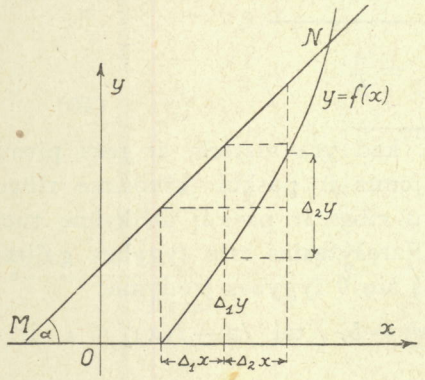
Uždaviniai: 69. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}$. 70. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$.

71. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a \sin bx}{cx}$. 72. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg} x}{x}$. 73. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

74. Įrodyti, kad stačiame trikampy vienam statiniui be galo ilgėjant, skirtumas tarp įžambinės ir to statinio artėja į nulį.

§ 23. IŠVESTINĖ, ARBA DIFERENCIALŲ SANTYKIS.

Kai kuriuos klausimus sprendžiant, yra svarbu žinoti, kaip funkcija keičiasi. Funkcijos pakitėjimo santykis su argumento pakitėjimu yra funkcijos kitėjimo rodiklis. Juo didesnis tas santykis, juo greičiau funkcija kinta. Linijinių, arba pirmojo laipsnio, funkcijų kitėjimas yra pastovus, kitų nepastovus. Iš brėžinio matyti, kad tiesės MN, kurios lygtys $y = \mathrm{tg}\alpha \,.\, x + n$, argumentui (abscisai) pakitėjus $\triangle x$, funkcija (ordinata) pakitėja $\triangle y$, ir santykis



23 brėž.

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \mathrm{tg}\alpha$$

— visada pastovus, nežiūrint kurio didumo $\triangle x$.

Jei kurios kitos funkcijos $y = f(x)$ grafinis vaizdas yra to paties brėžinio kreivė, tai, esant $\triangle_1 x = \triangle_2 x$, paprastai, $\triangle_1 y \neq \triangle_2 y$. Vadinasi, ir

$$\frac{\triangle_1 y}{\triangle_1 x} \neq \frac{\triangle_2 y}{\triangle_2 x}.$$

Be to, santykio $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ dydis pareina nuo $\triangle x$, nes iš to paties brėžinio matyti, kad

$$\frac{\triangle_1 y + \triangle_2 y}{\triangle_1 x + \triangle_2 x} \neq \frac{\triangle_1 y}{\triangle_1 x} \neq \frac{\triangle_2 y}{\triangle_2 x}$$

Tačiau, juo mažesnį imsime argumento pakitėjimą $\triangle x$, juo mažesnis bus ir tolydinės funkcijos pakitėjimas $\triangle y$ ir tų pakitėjimų santykiai vienas nuo antro mažiau besiskirs. Tad

$$\lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

yra funkcijos kitėjimo rodiklis. Toji riba, kaip ir kiekvienas santykis, parodo, kiek kartų funkcija sparčiau didėja ar mažėja (žiūrint, koks, teigiamas ar neigiamas, yra $\triangle y$, kai $\triangle x$ yra teigiamas) negu argumentas.

$$\lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} \qquad (11)$$

yra vadinamas funkcijos išvestine. Tad išvestine vadiname ribą, į kurią eina santykis funkcijos pakitimo su argumento pakitimu, šiam paskutiniam einant į nulį.

Funkcijos (tiesės)

$$y = mx + n$$

išvestinė, kaip jau pastebėjome anksčiau, yra

$$\lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \mathrm{tg}\alpha = m.$$

Tai randame ir neatsižvelgdami į brėžinį šiuo būdu:

$$\lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{m(x+\triangle x) + n - (mx+n)}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0} \frac{m \triangle x}{\triangle x} = m.$$

Funkcijos išvestinė rašoma dar taip:

$$\lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \frac{df(x)}{dx} =$$

$$= \frac{dy}{dx} = y' = f'(x) \qquad (12)$$

Kintamųjų dydžių skirtumai, arba pakitėjimai, kurie eina į nulį (vadinasi, kurie gali būti mažesni už bet kurį nors labai mažą dydį ε) vadinasi diferencialais; už tat išvestinė dar vadinama

diferencialų santykiu. Diferencialą rašome, dėdami prie kintamojo raidę „d“, pav., dx, dy, dz. Ir čionai d nėra koeficientas, bet diferencialo pirmoji raidė. Rašydami diferencialus „limes“ apleidžiame, nes ir be to, pav., aišku, kad $\frac{dy}{dx}$ yra riba.

Jeigu funkcija turi išvestinę, tai ji vadinama diferenciuojama. Tolydinės funkcijos yra, paprastai, visur diferenciuojamos. Diferencialų santykio sudarymas vadinasi funkcijos diferenciavimų (diferenciacija). Diferenciacijos mokslas — diferencialinis skaičiavimas.

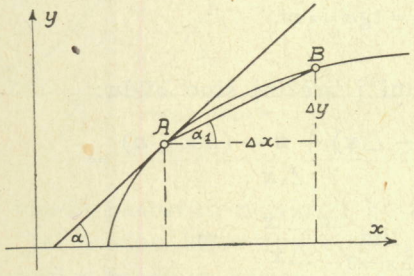
Rasime išvestinę funkcijos $y = x^2$.

$$y^1 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x. \qquad (13)$$

Funkcijos $y = x^2$ išvestinė proporcinga x, kitaip sakant, juo didesnis x, juo greičiau didėja funkcija.

§ 24. IŠVESTINĖS GEOMETRINĖ IR MECHANINĖ REIKŠMĖ.

Tebūnie duota kokia nors funkcija $y = f(x)$ (24 brėž.). Imsime kurias nors dvi tos funkcijos reikšmes $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_1 + \Delta x; y_1 + \Delta y)$. Iš brėžinio matyti, kad



24 brėž.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha_1,$$

Δx einant į 0, taškas B eina į A, ir kertamoji AB virsta liečiamąja taške A. Kertamosios linkmės kampas α_1 virsta liečiamosios linkmės kampu α. Todėl

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha. \qquad (14)$$

Taigi, geometriškai funkcijos išvestinė reiškia atitinkamos liečiamosios linkmės kampo tangentą. Todėl norint išvesti liečiamąją kuriame nors funkciją vaizduojančios kreivės taške, ir teko išmokti funkcija diferenciuoti.

Kadangi $\mathrm{tg}\alpha > 0$, kai $90^0 > \alpha > 0$, ir $\mathrm{tg}\alpha < 0$, kai $180^0 > \alpha > 90^0$, tai, didėjant x-ui, turi didėti ir y, kai išvestinė yra teigiama, ir mažėti y, kai išvestinė neigiama.

$$\mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0,$$

kai $\Delta y > 0$, ir

$$\mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0,$$

kai $\Delta y < 0$. Taigi išvestinės ženklas pasako, ar funkcija yra didėjanti, ar mažėjanti.

Pastebėsime dar, kad didėjančios funkcijos liečiamoji eina aukštyn, mažėjančios — žemyn.

Funkcijos išvestinė gali turėti svarbią reikšmę ir mechanikoje. Kelias, kurį nueina taškas per kurį nors laiką t, yra laiko funkcija. Jei judesio greitis yra pastovus, tai kelias, arba jo dalis, padalintas iš atitinkamo laiko, duoda greitį. Vadinasi, greitis

$$c = \frac{f(t)}{t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Kitas dalykas, kada greitis nepastovus. Tuo atveju, pav., santykis

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

reiškia vidutinišką judesio greitį per $t_2 - t_1$ laiką. Tačiau juo mažesnį imsime laiko ir kelio intervalą, juo arčiau tikrojo greičio turėsime vidutinišką greitį. Už tat bet kurio laiko tikruoju, arba momentiniu, greičiu vadiname

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = f'(t). \qquad (15)$$

kur $\Delta t \to 0$ yra laiko ir $\Delta s \to 0$ atitinkamas kelio diferencialai. Vadinasi, jei duotoji funkcija yra judesio kelias, tai tos funkcijos išvestinė, arba diferencialų santykis, yra greitis.

Pavyzdžiu imsime krentančių kūnų kelio funkciją. Iš kūnų kritimo stebėjimų galime rasti, kad kritimo kelio funkciją $s = f(t)$ galima išreikšti lygtimis

$$s = \frac{g \cdot t^2}{2},$$

kur g yra vadinamoji žemės gravitacijos konstanta, lygi 9,81 m sek^{-2}. Diferenciavę šitą funkciją, kaip praėjusiame paragrafe, randame jos išvestinę

$$s' = gt.$$

Bet kelio funkcijos išvestinė yra greitis. Tad $s' = v = gt$. Gavome, kad greitis proporcingas laikui. Proporcingumo daugiklis yra gravitacijos konstanta.

Uždaviniai: 75. Įrodyti, kad pastovaus dydžio išvestinė lygi nuliui.

76. Rasti išvestinės funkcijų:

a) $y = 3x - 7$,
b) $2x - 3y + 4 = 0$,
c) $y = x^2 - x + 2$.

77. Išbrėžti, pasinaudojant išvestine, liečiamąją užd. 76 c kreivės taške $A(1\,;1)$.

78. Švytuoklės nueitasis kelias $s = r \sin x$. Reikia rasti švytuoklės švytavimo greitis.

§ 25. FUNKCIJŲ SUMOS, SANDAUGOS IR DALMENS DIFERENCIAVIMAS.

Turime $y = f(x) \mp \varphi(x)$. Rasime y-o išvestinę.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \mp \varphi(x + \Delta x) - [f(x) \mp \varphi(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \mp \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) \mp \varphi(x)}{\Delta x} =$$

$$= f'(x) \mp \varphi'(x). \qquad (16)$$

Vadinasi, funkcijų algebrinės sumos išvestinė lygi išvestinių sumai. Norėdami diferenciuoti sveiką

algebrinę funkciją, turime diferenciuoti kiekvieną narį skyrium ir gautas išvestines sujungti į vieną reiškinį tais pačiais ženklais, kuriais buvo sujungti duotos funkcijos nariai.

Dabar diferenciuosime funkcijų sandaugą:

$$y = f(x) \cdot \varphi(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot \varphi(x + \Delta x) - f(x) \cdot \varphi(x)}{\Delta x}$$

Skaitiklyje atimsime ir pridėsime po $f(x + \Delta x) \cdot \varphi(x)$, nuo ko trupmenos didumas nepasikeis. Tad

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)\varphi(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \cdot \varphi(x) + f(x + \Delta x)\varphi(x) - f(x) \cdot (x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \right] +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \left[\varphi(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] =$$

$$= f(x)\,\varphi'(x) + f'(x)\,\varphi(x) = f'(x)\,\varphi(x) + f(x)\,\varphi'(x). \qquad (17)$$

Žodžiais tariant: dviejų funkcijų sandaugos išvestinė lygi pirmosios funkcijos išvestinei, padaugintai iš antrosios, plius antrosios funkcijos išvestinė, padauginta iš pirmosios funkcijos. Pav., $y = x(x - 2)$; $y' = x'(x - 2) + x(x - 2)' = x - 2 + x = 2(x - 1)$.

Taikant šitą pačią taisyklę daugelio funkcijų sandaugai, $y = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \ldots$, galima gauti:

$$y' = f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \ldots + f_1(x) \cdot f_2'(x) \cdot f_3(x) \ldots +$$
$$+ f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3'(x) \quad + \ldots$$

Kadangi pastovaus skaičiaus išvestinė lygi nuliui, tai lengva įrodyti, kad funkcijos $y = af(x)$ išvestinė

$$\frac{daf(x)}{dx} = af'(x). \qquad (18)$$

Iš tikrųjų, imdami funkcijų sandaugos diferenciavimo formulę, gauname

$$\frac{daf(x)}{dx} = a'f(x) + af'(x) = af'(x).$$

Pagaliau, funkcijų dalmens išvestinę galime šitaip rasti:

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}; \quad y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\triangle x)}{\varphi(x+\triangle x)} - \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\triangle x)\ (x) - \ (x+\triangle x)\, f(x)}{\varphi(x+\triangle x)\, \varphi(x)}}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\triangle x)\varphi(x) - \varphi(x+\triangle x) f(x) + f(x)\varphi(x) - f(x)\varphi(x)}{\triangle x}}{\varphi(x+\triangle x)\varphi(x)} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\varphi(x)\dfrac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} - f(x)\dfrac{\varphi(x+\triangle x) - \varphi(x)}{\triangle x}}{\varphi(x+\triangle x)\,\varphi(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)\ \varphi(x) - f(x)\,\varphi'(x)}{[\,\varphi(x)]^2}. \qquad (19)$$

Pav.,

$$y = \frac{x^2-1}{x^2+1}; \quad y' = \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)\,(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1-x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Uždaviniai. Diferenciuoti:

79. $y = x^2 + x + 1.$

80. $y = \dfrac{x-1}{x^2+1}.$

81. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}.$

82. $y = (x-4)\,(x+3) - \dfrac{1-x}{x+1}.$

§ 26. LAIPSNIO FUNKCIJOS DIFERENCIAVIMAS.

Laipsnio funkcijos išvestinė reikia rasti trim atvejais: kai laipsnio rodiklis yra sveikas ir teigiamas skaičius, kai sveikas ir neigiamas ir kai trupmeninis. Šiame paragrafe tekalbėsime apie pirmuosius du atvejus.

1. $y = x^n$; n yra sveikas teigiamas skaičius.

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(x+\triangle x)^n - x^n}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\triangle x + \dfrac{n(n-1)}{2!}\, x^{n-2}\triangle^2 x + \ldots - x^n}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\, x^{n-2}\triangle x + \ldots\right) = \underline{nx^{n-1}}. \qquad (20)$$

2. $y = x^{-n}$; n yra sveikas neigiamas skaičius.

$$y' = (x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{1'.\,x^n - (x^n)'.\,1}{(x^n)^2} =$$

$$= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = \underline{-nx^{-n-1}}. \qquad (20a)$$

Pasirodo, kad šitais dviem atvejais laipsnio išvestinė lygi laipsnio rodikliui, padaugintam iš to paties laipsnio, tik kurio rodiklis yra vienetu mažesnis.

Mokėdami diferenciuoti funkcijų sumą, sandaugą, dalmenį ir funkcijos laipsnį, galime diferenciuoti kiekvieną racionalinę funkciją. Pavyzdys:

$$y = \frac{1+x}{2+3x-4x^2};$$

$$y' = \frac{(1+x)'(2+3x-4x^2) - (1+x)\,(2+3x-4x^2)'}{(2+3x-4x^2)^2} =$$

$$= \frac{1(2+3x-4x^2) - (1+x)\,(3-8x)}{(2+3x-4x^2)^2} =$$

$$= \frac{2+3x-4x^2-3+8x-3x+8x^2}{(2+3x-4x^2)^2} = \frac{4x^2+8x-1}{(2+3x-4x^2)^2}.$$

Uždaviniai. Diferenciuoti funkcijas:

83. $y = x^2$. 84. $y = 4x$. 85. $y = 5x^3$.

86. $y = ax^n$. 87. $y = \sqrt{5x^5}$. 88. $y = \frac{x^n}{n}$.

89. $y = \frac{2}{5}x^4$. 90. $y = \left(\frac{2x}{5}\right)^5$. 91. $y = x^4 - 5x^3 - 6x + 28$.

92. $y = 4x^5 + 7x^3 + 9x - 12$.

93. $y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3}$.

94. $y = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$.

95. $y = \frac{x^4}{4!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!}$.

96. $y = (x - 3) . (x - 4)$. 97. $y = (x^2 + a) . (x^2 + b)$.

98. $y = (x^2 + a) . (x^2 + b) . (x^2 + c)$.

99. $y = (\frac{a^2}{2} - ax + x^2) . (\frac{a^2}{2} + ax + x^2)$.

100. $y = \frac{a}{x}$. 101. $y = \frac{a}{x^2}$. 102. $y = \frac{1}{nx^n}$. 103. $y = \frac{5}{2+x}$.

104. $y = \frac{5 + x}{2 + 3x}$. 105. $y = \frac{5 + 3x}{5 + 3x + x^2}$.

106. $y = \frac{x + 9}{x^2 - ax - b}$. 107. $y = \frac{x}{x^2 - a}$.

108. $y = \frac{1 + 5x + 7x^2}{1 + 4x + 3x^2}$. 109. $y = \frac{a + bx + cx^2}{d + ex + fx^2}$

110. Parašyti lygtys liečiamosios taške $(2; y_1)$, jei kreivės lygtys $y = x^2 + 1$.

111. Parašyti lygtys liečiamosios taške $(2; y_1)$, jei kreivės lygtys $y = \frac{x + 1}{x - 1}$.

112. Kuriame taške liečia tiesė $y = 3x + n$ kreivę $y = x^2 + 4x - 1$?

113. Rasti ilgis liečiamosios tarp abscisų ašies ir kreivės $x^2 - 20x + 5y + 30 = 0$ lietimo taško $P(10; y_1)$.

114. Rasti judančio kūno greitis, jei kelias y per x sekundžių išreiškiamas lygtimis $6x - 2y + 10x^2 = 0$.

§ 27. FUNKCIJOS DIFERENCIALAS. SUDĖTINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIAVIMAS.

Iš lygčių, kurios pasako, kas yra išvestinė, būtent, iš

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = f'(x),$$

galima parašyti, kad

$$\frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = f'(x) + \varepsilon,$$

kur ε eina į nulį, kai $\triangle x$ eina į nulį. Iš šių paskutinių lygčių galime išreikšti funkcijos prieauglį šitokia formule

$$f(x + \triangle x) - f(x) = f'(x) . \triangle x + \varepsilon \triangle x.$$

arba $\triangle y = y' . \triangle x + \varepsilon . \triangle x.$

Juo mažesnis bus argumento ir (tolydinės) funkcijos pakitėjimas juo mažesnis bus ir ε, juo tiksliau sandauga $y' . \triangle x$ išreikš tą funkcijos pakitėjimą. Nors nėra prasmės kalbėti apie be galo mažus dydžius ir jų santykius, bet į $\triangle x$ ir $\triangle y$ galima visada žiūrėti kaip į kintamuosius dydžius, kurių mažėjimo riba yra nulis. Tokius kintamuosius dydžius, kaip jau pirmiau buvo kalbėta, vadiname diferencialais ir simboliškai juos pažymime dx ir dy. Iš paskutinių lygčių matyti, kad

$$\underline{dy = f'(x)dx} \qquad (21)$$

Kadangi, be to,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

tai matyti, kad iš diferencialų galima dalyti ir dauginti, kaip iš paprastų algebrinių dydžių.

Funkcijos diferencialo reiškinys

$$dy = f'(x)dx$$

padeda įrodyti, kaip reikia diferenciuoti sudėtinės ir atvirkštinės funkcijos.

Sudėtinėmis funkcijomis vadiname tokias, kurios pareina ne tiesiog nuo argumento, bet nuo jo funkcijos. Pav., $y = (1 - 2x^2)^3$

yra sudėtinė funkcija, nes y yra trečiojo laipsnio funkcija ne x-o, bet $(1-2x^2)$-o. Sudėtinės funkcijos yra, pav., dar šios: $y=\sqrt{1+x}$; $y=\sin\frac{x}{2}$; $y=\ln\cos(x^2+1)$.

Įrodysime, kokia yra sudėtinės funkcijos $y=f[\varphi(x)]$ išvestinė. Pažymėję $z=\varphi(x)$, turime

$$y=f(z);\quad \frac{dy}{dz}=f'(z)$$

$$z=\varphi(x);\quad \frac{dz}{dx}=\varphi'(x);\qquad dz=\varphi'(x)dx$$

$$\frac{dy}{\varphi'(x)dx}=f'(z);\quad \underline{\frac{dy}{dx}=f'(z)\,.\,\varphi'(x).} \tag{22}$$

Pav., diferenciuodami

$$y=(1-2x^2)^3,$$

gauname

$$z=1-2x^2;\quad y=z^3;\quad \frac{dy}{dz}=3z^2\quad \frac{dy}{dz}=3(1-2x^2)^2$$

$$\frac{dz}{dx}=-4x\quad \frac{dy}{dx}=3(1-2x^2)^2\,.\,(-4x)=-12x(1-2x^2)^2.$$

Dar vienas pavyzdys:

$$y=(x^2-x+1)^2(1-x)$$
$$y'=2(x^2-x+1)\,(x^2-x+1)'(1-x)+(1-x)'(x^2-x+1)^2$$
$$y'=2(x^2-x+1)\,(2x-1)\,(1-x)-(x^2-x+1)^2=$$
$$=(x^2-x+1)(4x-5x^2-3).$$

§ 28. ATVIRKŠTINIŲ, SPECIALIAI IRRACIONALINIŲ, FUNKCIJŲ DIFERENCIAVIMAS.

Jei $y=f(x)$ yra tolydinė monotoninė (visą laiką didėjanti arba mažėjanti) funkcija, tai ir jos atvirkštinė funkcija $x=\varphi(y)$ yra taip pat tolydinė ir monotoninė. Kiekvieną tiesioginės funkcijos argumento reikšmę atitinka viena funkcijos reikšmė ir atvirkščiai, kiekvieną y-o reikšmę atitinka viena, ar dvi, ar daugelis x-o reikšmių.

Kadangi

$$y'=f'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}$$

ir kadangi $\triangle y\to 0$, kai $\triangle x\to 0$, tai galime parašyti, kad

$$x'=\varphi'(y)=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{\triangle x}{\triangle y}=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{1}{\frac{\triangle y}{\triangle y}}=\frac{1}{\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}}=\frac{1}{f'(x)},$$

vadinasi,

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}\ \text{arba}\ \underline{f'(x)\,.\,\varphi'(y)=1.} \tag{23}$$

Tas pat lengva matyti, jei išvestinė bus parašyta diferencialų santykio forma, nes

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Pažymėję

$$f'(x)=\mathrm{tg}\alpha\quad \text{ir}\quad \varphi'(y)=\mathrm{tg}\beta,$$

kur α ir β yra kampai, kuriuos sudaro liečiamoji su x-ų ir y-ų ašimis, ir turėdami galvoje, kad $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, taip pat randame, kad

$$f'(x)\,\varphi'(y)=\mathrm{tg}\alpha\,.\,\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}\alpha\,.\,\mathrm{ctg}\alpha=1$$

ir

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

Laipsnio funkcijos $y=x^n$ atvirkštinė funkcija yra $x=\sqrt{y}=y^{\frac{1}{n}}$. Rasime šitos irracionalinės funkcijos išvestinę:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{y^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Dabar sukeitę x ir y vietomis, turėsime

$$y=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}};\quad \underline{y'=\frac{1}{n}\,.\,x^{\frac{1}{n}-1}} \tag{24}$$

Matome, kad anksčiau surastoji taisyklė laipsnio funkcijoms diferenciuoti, kada laipsnio rodiklis yra sveikas skaičius, tinka ir tada, kai tas rodiklis yra trupmeninis. Pavyzdys:

$$y=\sqrt{x^2-1}=(x^2-1)^{\frac{1}{2}};$$

$$y'=\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}.(x^2-1)'=\frac{2x}{2\sqrt{x1-}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Uždaviniai. Reikia diferenciuoti 115—126 funkcijos.

115. $y=\sqrt{x}$.

116. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

117. $y=\sqrt[m]{x^n}$.

118. $y=x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}$

119. $y=\sqrt{a-bx^2}$.

120. $y=x^2\sqrt{3-x}$.

121. $y=\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}$.

122. $y=\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}}$.

123. $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

124. $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^3}}$.

125. $y=\left(\sqrt{x(2-x)}+x\right)^2$.

126. $y=\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

§ 29. TRIGONOMETRINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIAVIMAS.

Rasime išvestines funkcijų $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$ ir $y=\operatorname{ctg}x$.

1. $y=\sin x;\ y'=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{\sin(x+\triangle x)-\sin x}{\triangle x}=$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{2\sin\frac{x+\triangle x-x}{2}\cos\frac{x+\triangle x+x}{2}}{\triangle x}=$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{2\sin\frac{x+\triangle x-x}{2}\cos\frac{x+\triangle x+x}{2}}{\triangle x}=$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\sin\frac{\triangle x}{2}\cos\left(x+\frac{\triangle x}{2}\right)}{\frac{\triangle x}{2}}=$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\sin\frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}}\cdot\lim_{\triangle x\to 0}\cos\left(x+\frac{\triangle x}{2}\right)=$$

$$=1\,.\cos x=\cos x;\quad \underline{(\sin x)'=\cos x.}\qquad(25)$$

2. $y=\cos x;\ y'=(\operatorname{soc}x)'=\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^1=$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=-\sin x;\quad \underline{(\cos x)'=-\sin x.}\qquad(26)$$

3. $y=\operatorname{tg}x;\ y'=(\operatorname{tg}x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\cos x\,.\cos x+\sin x\,.\sin x}{\cos^2 x}=$

$$=\frac{1}{\cos^2 x};\quad \underline{(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}}.\qquad(27)$$

4. $y=\operatorname{ctg}x;\ y'=(\operatorname{ctg}x)'=\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'=\dfrac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=$

$$=-\frac{1}{\sin^2 x};\quad \underline{(\operatorname{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}}.\qquad(28)$$

Dabar diferenciuosime atitinkamas keturias atvirkštines funkcijas.

1. $x=\operatorname{arc}\sin y$ iš $y=\sin x$,

$$x'=\frac{1}{y'}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

arba, sukeitę kintamuosius, turime

$$\underline{y'=(\operatorname{arc}\sin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.\qquad(29)$$

2. Panašiu būdu rasime išvestinę atvirkštinės funkcijos $x=\operatorname{arc}\cos y$ iš $y=\cos x$,

$$x'=-\frac{1}{\sin x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

arba, jei

$$y=\operatorname{arc}\cos x,\ \text{tai}\ \ y^1=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\qquad(30)$$

3. $x=\operatorname{arc}\operatorname{tg}y;\quad y=\operatorname{tg}x,$

$$x'=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{1+y^2}$$

arba:

$$\underline{y'=(\operatorname{arc}\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{1+x^2}}.\qquad(31)$$

4. $x = \text{arc ctg}y; \quad y = \text{ctg}x,$

$$x' = \sin^2 x = -\frac{1}{1+\text{ctg}^2 x} = -\frac{1}{1+y^2}$$

arba:

$$y' = (\text{arc ctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad (32)$$

Kuris radikalo ženklas pirmųjų dviejų ciklometrinių funkcijų išvestinių reikia imti, pareina nuo to, ar kalbamoj vietoj tos funkcijos didėja ar mažėja.

Uždaviniai: Diferenciuoti funkcijos:

127. $y = \sin 2x.$
128. $y = a \sin x.$
129. $y = \sin^2 x.$
130. $y = \sin^n x.$
131. $y = \sin(x^2).$
132. $y = \cos\frac{x}{3}.$
133. $y = x\cos x.$
134. $y = \frac{\sin x \cos x}{x}.$
135. $y = \frac{1}{\cos^2 x}.$
136. $y = \sin^2(ax+b).$
137. $y = x - {}^1/_2 \sin 2x.$
138. $y = 3\text{tg}(x+1).$
139. $y = \text{tg}^3 x + 3\text{tg}x.$
140. $y = \text{tg}x - \text{ctg}x.$
141. $y = 2\sin^2 x + 3\cos^2 x.$
142. $y = \frac{\sqrt{\sin^2 x + 2\cos^2 x}}{\sin x}.$
143. $y = \frac{\sin x}{\sqrt{a\sin^2 x + b\cos^2 x}}.$
144. $y = \text{arc}\sin nx.$
145. $y = \text{arc}\cos(x^2).$
146. $y = \text{arc tg}\sqrt{x}.$
147. $y = \text{arc ctg}x.$
148. $y = \text{arc ctg}\frac{1}{x}.$
149. $y = \text{arc}\sin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
150. $y = \text{arc}\sin\sqrt{\frac{2x}{3+x^2}}.$
151. $y = 2\text{arc}\sin\sqrt{\frac{4x}{3+x}}.$

152. Kurio linkmės kampo yra liečiamoji funkcijų $y = \sin x$ ir $y = \cos x$ koordinatų sistemos pradžios taške?

153. Rasti liečiamosios būklė funkcijos $y = \text{tg}x$, kai $x_1 = \frac{\pi}{2}$.

154. Kuriuo kampu susikerta liečiamosios funkcijų $y = \sin x$ ir $y = \cos x$ taške $x = \frac{\pi}{4}$.

§ 30. RODIKLINIŲ IR LOGARITMINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIAVIMAS.

Rodiklinės funkcijos $y = a^x$ išvestinę rasime paprastuoju būdu:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} =$$

$$= a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Kadangi, einant Δx į nulį, $a^{\Delta x}$ eina į vienetą, tai $a^{\Delta x} - 1$ eina į nulį. Pažymėsime tą skirtumą trupmena $\frac{1}{n}$, kur n eina į begalybę, Δx einant į nulį. Iš lygčių

$$a^{\Delta x} - 1 = \frac{1}{n}$$

rasime Δx:

$$a^{\Delta x} = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\Delta x = \lg_a\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Dabar turime

$$y' = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\lg_a\left(1 + \frac{1}{n}\right)} =$$

$$= a^x \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n\lg_a\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = a^x \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\lg_a\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} =$$

$$= a^x \frac{1}{\lg_a e} = a^x \lg_e a = a^x \ln a. \text{*)} \qquad (33)$$

„*Lna*“ reiškia natūralinį logaritmą skaičiaus *a*.

Kadangi $\ln e = 1$, tai funkcijos $y = e^x$ išvestinė

$$y' = e^x. \qquad (34)$$

Matome, kad rodiklinė funkcija su pagrindu *e* yra tuo ypatinga, kad jos išvestinė lygi pačiai funkcijai. Tą rodiklinę funkciją vadiname dar „*e*“ funkcija.

*) Sąryšį $\lg_a e = \frac{1}{\lg_e a}$ galime gauti šiuo būdu: sakysime, kad $x = \lg_a e$, tai $e = a^x$ ir $\lg_e 1 = \lg_e(a^x)$; iš čia $1 = x\lg_e a$, $1 = \lg_a e \cdot \lg_e a$.

Rodiklinių funkcijų $y = a^x$ ir $y = e^x$ atvirkštinės funkcijos yra logaritminės: $x = \lg_a y$ ir $x = \ln y$. Jų išvestines rasime taip, kaip visų atvirkštinių funkcijų.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a} \quad \text{ir} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Pakeitę kintamuosius vietomis, gauname:

$$y = \lg a^x; \quad y' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (35)$$

ir

$$y = \ln x; \quad y' = \frac{1}{x}. \qquad (36)$$

Uždaviniai. Diferenciuoti:

155. $y = \ln(ax)$.

156. $y = \frac{\ln x}{x}$.

157. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

158. $y = \ln \frac{1}{1+x}$.

159. $y = \ln(x^n)$.

160. $y = x^x$.

161. $y = \ln \sin \frac{x}{2}$.

162. $y = \frac{\lg_a x}{\lg_b x}$.

163. $y = \ln \sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}$.

164. $y = xe^x$.

165. $y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$.

166. $y = \frac{e^x}{\sin x}$.

167. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

168. $y = e^x \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}}$.

169. $y = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) \cdot e$.

170. $y = e^{\arcsin(x^2 - a^2)}$

Šiame skyriuje esame susipažinę su funkcijos išvestinės, arba diferencialų santykio, sąvoka ir reikšme ir parodę, kaip diferenciuojamos elementarinės funkcijos. Išvestinė padeda mums ištirti, kaip kurioje vietoje kinta duotoji funkcija, ir nubrėžti bet kuriame geometrinio funkcijos vaizdo taške liečiamąją. Tuo būdu su diferencialio skaičiavimo pagalba galime gerokai ištirti pačias funkcijas ir išspręsti visą eilę geometrinių ir mechaninių uždavinių.

Dabar trečiajame skyriuje nagrinėsime algebrines antrojo laipsnio funkcijas, o ketvirtajame — visokių elementarinių funkcijų kitimo klausimus.

III SKYRIUS

Algebrinės antrojo laipsnio funkcijos.

§ 31. ANTROJO LAIPSNIO LYGTYS SU DVIEM KINTAMAISIAIS IR GEOMETRINIS JŲ VAIZDAS.

Algebrinės lygtys su dviem kintamaisiais, kurių abudu kintamieji arba vienas katras iš kintamųjų yra antro, bet ne aukštesnio, laipsnio, arba kurių vienam nary yra abiejų kintamųjų sandauga, vadinasi antrojo laipsnio lygtimis. Tokios yra, pavyzdžiui:

$x^2 + y^2 - a^2 = 0$; $x^2 + y + c = 0$; $x + y^2 - k = 0$; $xy = c$.

Taip pat antrojo laipsnio lygtys yra, pav., $y = \frac{x+a}{x+b}$, nes, pakeitę jas sveikomis lygtimis, gauname $xy - x + by - a = 0$.

Anksčiau esame jau įsitikinę, kad algebrinės pirmojo laipsnio lygtys su dviem kintamaisiais geometriškai visada reiškia tiesę. Atskiri antrojo laipsnio lygčių geometriškojo vaizdavimo pavyzdžiai yra parodę, kad jos reiškia, paprastai, kreivas linijas. Reikės dar įsitikinti, kokias, būtent, kreives gali reikšti antrojo laipsnio lygtys.

Pačios bendrosios antrojo laipsnio lygtys su dviem kintamaisiais yra šios:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Vienam ar keliems koeficientams esant lygiems nuliui, tos bendrosios lygtys darosi paprastesnės, specialinės. Matysime, kad koeficientai pasako kreivių formą ir jų vietą koordinatų sistemoje.

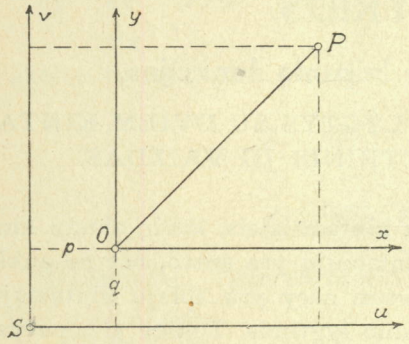
Uždaviniai. Rasti geometrinis vaizdas lygčių:

171. $y^2 - x = 0$.
172. $(y-1)^2 - x = 0$.
173. $x^2 + y^2 = 4$.
174. $x^2 - y^2 = 4$.
175. $x^2 - 2xy - 2x + 4y + 24 = 0$.
176. Rasti grafiškai susikirtimo taškai kreivių:

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y = 9^1/_4; \quad xy = 1.$$

§ 32. APSKRITIMAS.

Norėdami rasti lygtis apskritimo, kurio spindulys r, imsime koordinatų sistemą, kurios pradžia guli apskritimo centre.



25 brėž.

Iš geometrijos žinome, kad kurio nors apskritimo taško $P(x; y)$ (25 brėž.) koordinatos turi tokią ypatybę:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Šitos lygtys yra patenkinamos, kai x ir y reiškia apskritimo taško koordinatas. Jei taškas guli viduj apskritimo, tai jo $x^2 + y^2 < r^2$, jei už apskritimo, tai $x^2 + y^2 > r^2$. Kadangi lygtis tenkina tik apskritimo taškų koordinatos, tai jas vadiname apskritimo lygtimis.

Apskritimo lygtys

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (1)$$

kai kada dar rašomos taip:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1.$$

Nebūtinai reikalinga imti koordinatų sistemos pradžia apskritimo centre. Galime imti koordinatų sistemos pradžią ir kuriame nors taške S (25 brėž.). Naujoje UV koordinatų sistemoje apskritimo centro O koordinatos bus p ir q. Kadangi $x = u - p$ ir $y = v - q$, tai šituo atveju apskritimo lygtys yra:

$$(u - p)^2 + (v - q)^2 = r^2. \qquad (2)$$

Šitos lygtys reiškia apskritimą bet kurioje koordinatų sistemoje. Atskliautę ir atkėlę r^2 į kairę pusę gauname

$$u^2 + v^2 - 2pu - 2qv + p^2 + q^2 - r^2 = 0.$$

Padauginę visus šių lygčių narius iš A ir pažymėję naujuosius jų koeficientus naujomis didžiosiomis abėcėlės raidėmis, gauname

$$Au^2 + Av^2 + Bu + Cv + D = 0.$$

Vietoj u ir v vėl parašę senąsias x ir y koordinatas, pagaliau gauname

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0. \qquad (3)$$

Šitos lygtys yra pačios bendrosios apskritimo lygtys.

Lengva įsitikinti, atvirkščiai, kad kiekvienos to pavidalo lygtys tegali reikšti apskritimą. Padalinę visus lygčių narius iš A ir pridėję bei atėmę po $\frac{2^2}{4A^2}$ ir $\frac{C^2}{4A^2}$, gauname

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 = \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C^2}{4A^2} - \frac{D}{A}.$$

Iš šitų lygčių matyti, kad

$$\frac{B}{2A} = -p, \quad \frac{C}{2A} = -q \quad \text{ir} \quad \frac{\sqrt{B^2 + C^2 - 4AD}}{2A} = r$$

Vadinasi, lygtys $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$ reiškia spindulio r apskritimą koordinatų sistemoje, kurios pradžia taške S ir kurioj apskritimo centro koordinatos yra p ir q.

Kai $B^2 + C^2 - 4AD > 0$, r yra realus skaičius, kai $B^2 + C^2 - 4AD = 0$, $r = 0$ ir apskritimo vietoj turime vieną tašką (sakome dar: nulinio spindulio apskritimą) ir, pagaliau, kai $B^2 + C^2 - 4AD < 0$ r yra menamas, ir lygtys nereiškia jokios realinės kreivės.

Uždaviniai:

177. Parašyti lygtys apskritimo, kurio spindulys yra 5.

178. Parašyti lygtys apskritimo, kurio centro koordinatos yra $(-3; -5)$ ir spindulys $r = 4$. Kur stovi koordinatų sistemos pradžios taškas, apskritime ar už apskritimo?

179. Rasti lygtys apskritimo, kuris eina per koordinatų sistemos pradžią ir kurio centro koordinatos $(2; -3)$.

180. Parašyti lygtys apskritimo, kurio centro koordinatos yra $(5; 0)$ ir kuris liečia tiesę $x - y = 0$.

181. Rasti apskritimo $2(x^2 + y^2) - 2x + 6y - 3 = 0$ spindulys ir centro koordinatos.

182. Rasti centrinės (koordinatų sistemos pradžia yra centre) lygtys apskr., einančio per tašką $(-5; 3)$.

§ 33. APSKRITIMAS IR TIESĖ.

Norėdami rasti apskritimo ir tiesės susikirtimo taškų koordinatas, turime išspręsti apskritimo ir tiesės lygčių sistemą. Imsime centrines apskritimo lygtis ir bendrąsias tiesės lygtis:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = mx + n \end{cases}$$

$$x = \frac{-mn \pm \sqrt{m^2n^2 - (1+m^2)(n^2 - r^2)}}{1+m^2} =$$

$$= \frac{-mn \pm \sqrt{m^2r^2 + r^2 - n^2}}{1+m^2}.$$

Šio reiškinio realybė pareina nuo pošakninės tiekybės (diskriminantos) ženklo. Jei pošakninė tiekybė teigiama, tai turime dvi realines šaknis, vadinasi, ir du tiesės su apskritimu susikirtimo taškus, jei neigiama — tai šaknys menamos, susikirtimo taškų nėra, tiesė eina šalia apskritimo ir, pagaliau, jei pošaknis lygus nuliui, tai abi šaknys lygios, tiesė su apskritimu teturi vieną bendrą tašką; ji, vadinasi, liečia apskritimą.

Sakysime, kad tiesė kerta apskritimą. Kertamosios, arba stygos, vidurio koordinatos yra

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{2mn}{1+m^2}$$

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2n}{1+m^2}.$$

Iš šitų lygybių eina, kad

$$y_3 = -\frac{1}{m} x_3,$$

arba apskritai:

$$y = -\frac{1}{m} x.$$

Vadinasi, stygos vidurio koordinatos yra tiesėje, kuri eina per koordinatų sistemos pradžią, tad ir per apskritimo centrą, statmeniškai į duotąją stygą. Kadangi lygiagretės stygos turi tą patį statmenį, einantį per apskritimo centrą, tai gauname, kad lygiagrečių stygų viduriai stovi stygos statmenyje, einančiame

per apskritimo centrą. Toks statmuo kerta apskritimą dviejuose taškuose. Jis vadinamas d i a m e t r u. Diametro lygtys

$$y = -\frac{1}{m} x, \qquad (4)$$

kai stygos lygtys

$$y = mx + n.$$

Uždaviniai.

183. Rasti tiesės $2x - 7y + 1 = 0$ ir apskritimo $x^2 + y^2 = 9$ susikirtimo taškų koordinatos.

184. Rasti susikirtimo taškai tiesės $5y - x + 2 = 0$ ir apskritimo $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$.

185. Kuriuose taškuose kerta apskritimą $x^2 + y^2 = 109$ tiesė, kuri eina per tašką $P(4; -3)$ lygiagrečiai su tiese $3x + 7y - 3 = 0$?

186. Kokio ilgumo yra styga, kuri kerta apskritimą $x^2 + y^2 = 100$ ir kuri to apskritimo spindulio yra daloma pusiau taške $P(1; -1)$?

§ 34. APSKRITIMO TANGENTĖ IR NORMALĖ.

Tiesė, kuri teturi vieną bendrą tašką su kreive ir eina vienoje jos pusėje, vadinasi kreivės l i e č i a m o j i, arba t a n g e n t ė. Iš praėjusio skyriaus žinome, kad liečiamosios linkmės kampo tangentas lygus funkcijos, reiškiančios kreivę, išvestinės reikšmei lietimo taške. Pažymėję kreivės funkciją $f(x)$ ir linkmės kampą α, turime

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Iš apskritimo lygčių randame $\operatorname{tg}\alpha$ apskritimo tangentės, liečiančios apskritimą taške $P(x_1; y_1)$:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}; \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}; \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Kadangi tiesės, einančios per tašką $P(x_1; y_1)$, lygtys yra

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

tai apskritimo tangentės taške $P(x_1; y_1)$ lygtys bus

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$yy_1 + xx_1 = y_1^2 + x_1^2;$$

$$xx_1 + yy_1 = r^2. \qquad (5)$$

Normalė yra statmuo į tangentę lietimo taške. Apskritimo normalės lygtys gaunamos iš tangentės lygčių

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1).$$

Jos yra

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1),$$

$$y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x, \qquad (6)$$

nes liečiamosios ir normalės kampinių koeficientų sandauga lygi —1. Matome, kad apskritimo normalė sutampa su apskritimo skersmeniu ir spinduliu.

Tangentės ir normalės ilgumu vadiname atkarpą nuo liečiamojo taško ligi tangentės ir normalės susikirtimo su abscisų ašimi.

Uždaviniai:

187. Parašyti apskritimų $x^2+y^2=41$ ir $x^2+y^2-6x-8y+8=0$ tangentės ir normalės, einančių per tašką P_1 (5 ;4) ir P_2 (7 ; 5), lygtys.

188. Rasti apskritimo $x^2 + y^2 + 10x + 16y - 91 = 0$ tangentės taške $P(-11; 4)$ ilgumas.

189. Kuriuo kampu susikerta apskritimo $x^2 + y^2 = 625$ tangentės taškuose $P_1(24 ;7)$ ir $P_2(-15 ; 20)$?

190. Parašyti lygtys tangentės, einančios iš taško $P(0 ; 10)$ ir liečiančios apskritimą $x^2 + y^2 = 36$.

191. Parašyti tokio apskritimo lygtys, kurio centras yra koord. sist. pradžioje ir kurį liečia tiesė $12x + 5y - 78 = 0$.

192. Įrodyti, kad apskritimo $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ tangentės lygtys yra $(x-p)(x_1-p) + (y-q)(y_1-q) = r^2$.

ELIPSĖ

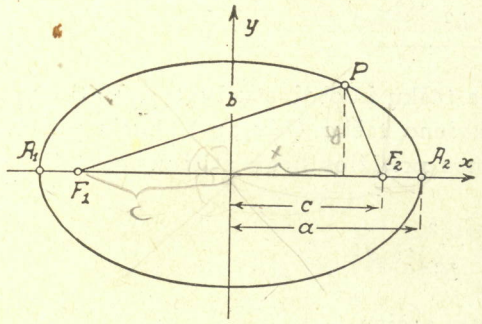
§ 35. CENTRINĖS ELIPSĖS LYGTYS.

Elipse vadiname tokią kreivę, kurios taškų nuotolių nuo dviejų pastovių taškų suma yra pastovus dydis. Pažymėję pastoviuosius taškus raidėmis F_1, F_2, elipsės tašką — P ir pastovų dydį — k, turime

$$PF_1 + PF_2 = k.$$

Pastovieji elipsės taškai vadinasi elipsės **židiniais**, arba fokusais; elipsės taško nuotoliai nuo jų — židininiais spinduliais, arba radijais vektorais. Židinių atstumo pusė vadinama **linijiniu ekscentricitetu**.*)

Paprasčiausias būdas elipsei išbrėžti yra toks. Elipsės židiniuose įsmeigiame dvi adatas. Ant jų palaidai užmetame surištais galais siūlą. Pieštuku ištempę siūlą, brėžiame aplink židinius siūlo leidžiamą liniją. Ji bus elipsė, nes pieštuko nuotolių nuo abiejų adatų suma bus pastovus dydis (žiūr. 26 brėž.). Norėdami rasti elipsės lygtis, imsime židinius jungiančią liniją abscisų ašimi, o į ją statmeninę liniją, einančią per židinių nuotolio vidurį, ordinatų ašimi. Be to, pažymėsime elipsės ekscentricitetą raide c ir pastovią židinių elipsės taško spindulių sumą nebe k, bet $2a$. Iš brėžinio matyti, kad



26 brėž.

$$PF_1^2 = r_1^2 = (c+x)^2 + y^2, \quad r_1 = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}$$

ir $$PF_2^2 = r_2^2 = (c-x)^2 + y^2, \quad r_2 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}.$$

Tad pirmasis elipsės lygčių pavidalas yra

$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a.$$

Išvaduosime šias lygtis iš irracionalybių. Perkėlę vieną radikalą į dešinę pusę, pakėlę abi lygčių puses kvadratu ir tinkamai jas sutvarkę, galime gauti:

$$(x^2 + y^2 + c^2) + \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} = 2a^2.$$

Panašiai dar kartą pakėlę kvadratu, gauname

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = [(x^2 + y^2 + c^2) - 2a^2]^2$$

ir, pagaliau,

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0.$$

*) Kad atskirtume nuo **numerinio** ekscentriciteto $e = \frac{c}{a}$ (žiūr. 26 brėž.).

Iš brėžinio matyti, kad $2c < 2a$, vadinasi, galime, kad būtų trumpiau, parašyti

$$a^2 - c^2 = b^2.$$

Padalinę abejas elipsės lygčių puses iš a^2b^2, pagaliau, gauname atsimintino pavidalo elipsės lygtis:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (7)$$

Šitos lygtys yra tik elipsės taškų koordinatų lygtys. Iš tikrųjų, lengva įsitikinti, kad kiekvieno taško $Q(x_1; y_1)$, kuris yra toliau nuo koordinatų sistemos pradžios negu atitinkamas elipsės taškas,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > 1$$

ir taško $R(x_2; y_2)$, kuris yra arčiau,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1.$$

Kadangi a ir b yra pastovūs dydžiai, tai x ir y turi būti aprėžti dydžiai, vadinasi, elipsė yra aprėžta uždara kreivė, nes kitaip

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \text{nebūtų lygu } 1.$$

Kiekvieną teigiamą arba neigiamą x reikšmę atitinka viena teigiama ir neigiama vienodo absoliutinio didumo y reikšmė, būtent,

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Iš čia matyti, kad elipsė yra simetrišką figūra. Ji kerta dviejuose taškuose kiekvieną koordinatų sistemos ašį. Iš lygčių matyti, kad

kai $x = 0$, $y = \pm b$,
kai $y = 0$, $x = \pm a$;

Taigi a ir b yra atkarpos, kurias elipsė kerta, koordinatų sistemos ašyse. $2a$ vadinasi elipsės d i d ž i o j i a š i s, $2b$ — m a ž o j i. Ašių galai vadinasi elipsės v i r š ū n ė m i s ir ašių susikirtimo taškas — elipsės centru. Dėl to pačios elipsės lygtys

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vadinamos c e n t r i n ė m i s l y g t i m i s.

Paėmę $\pm x = c$, gauname po dvi priešingas lygias židinines ordinatas $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Tos ordinatos vadinamos elipsės p u s p a r a m e t r i u ir žymimos raide p:

$$p = \frac{b^2}{a}. \qquad (8)$$

Elipsė yra žinoma, kai duoti du kurie iš jos keturių dydžių: ilgoji ašis, trumpoji ašis, ekscentricitetas, pusparametris.

Jei elipsės ašys yra lygios, tai elipsė

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

virsta apskritimu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Taigi apskritimu galėtume vadinti tokią elipsę, kurios ašys yra lygios, arba kurios ekscentricitetas lygus nuliui.

Uždaviniai:

186. Rasti židiniai elipsės, kurios $a = 5$ ir $b = 3$.

187. Rasti elipsės $\frac{x^2}{26} + \frac{y^2}{19} = 1$ ekscentricitetas.

188. Parašyti lygtys elipsės, kurios $b = 3$ ir $p = 1$.

189. Rasti elipsės $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ susikirtimo taškai su ašių pusiaukampinėmis.

190. Rasti, kur stovi taškai $(1; -3)$; $(-4; 1)$; $(3; 2,4)$, kai elipsės $a = 5$ ir $b = 3$.

191. Rasti elipsės ašys, kai $c = 5$ ir $p = 2$.

192. Įrodyti, kad $Ax^2 + By^2 + C = 0$ yra elipsės lygtys.

193. Parašyti lygtys elipsės $64x^2 + 100y^2 = 6400$ židininių spindulių, einančių per tašką $P(8; y > 0)$.

194. Kokį kampą sudaro elipsės $9x^2 + 25y^2 = 225$ židiniai spinduliai, einą per tašką P (4, $y > 0$)?

195. Kiek mm skiriasi trumpoji žemės kelio apie saulę ašis nuo ilgosios, jei ilgoji lygi 1 m ir jei žemės artimiausio ir tolimiausio nuotolio nuo saulės santykis yra 29 : 30?

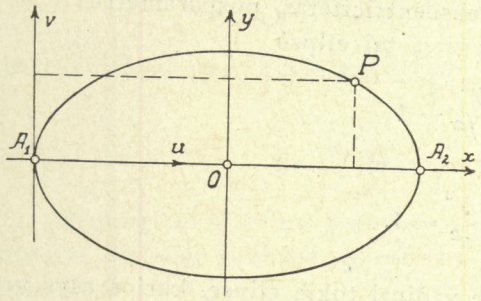
196. Marso kelią tikrindamas, Kepleris rado savo pirmąjį dėsnį (planetų keliai yra elipsės, bet ne apskritimai, kaip manė Kopernikas). Rasti, kiek skiriasi Keplerio elipsė nuo Koperniko apskritimo, jei Marso $c : a = 0{,}093$.

197. Kur yra žemės meridiano židinys, jei ekvatorinis žemės spindulys yra 6378,2 km ir poliarinis 6356,6 km?

§ 36. VIRŠŪNINĖS ELIPSĖS LYGTYS.

Kai koordinatų sistemos ašys sutampa su elipsės ašimis, elipsės lygtys yra

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



27 brėž.

Perkelsime koordinatų sistemos pradžią iš elipsės centro į jos viršūnę A. Naują sistemą pažymėsime UV. Iš brėžinio matyti, kad

$$u = x + a \text{ ir } x = v - a$$
$$v = y \qquad y = v.$$

Įstatysime į elipsės lygtis naujos sistemos koordinatas:

$$\frac{(u-a)}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1.$$

$$b^2u^2 - 2ab^2u + a^2b^2 + a^2v^2 = a^2b^2.$$

Sujungsime panašius narius ir vietoj $\frac{b^2}{a}$ parašysime p:

$$v^2 = \frac{2ab^2u}{a^2} - \frac{b^2u^2}{a^2}$$

$$v^2 = 2pu - \frac{p}{a}u^2.$$

Pažymėję naująsias koordinatas x ir y, turėsime elipsės lygtis

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2, \qquad (9)$$

kurios vadinamos v i r š ū n i n ė m i s.

Uždaviniai:

198. Įsitikinti, kad: a) perkėlus centrinių elipsės lygčių koordinatų pradžią į tašką $Q(i; k)$, gaunamos lygtys pavidalo $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$; b) pasukus koordinatų sistemą kampu α, gaunamos lygtys pavidalo $Ax^2 + By^2 + Cxy + D = 0$.

199. Elipsės viršūninės lygtys yra $y^2 = 5\frac{5}{9}x - \frac{25}{81}x^2$. Rasti elipsės ašys ir parašyti ašinės lygtys.

200. Duotos dviejų elipsės taškų koordinatos (2; 1) ir (6; —1) centrinėje koordinatų sistemoje. Rasti ašių ilgumas ir parašyti tos elipsės centrinės ir viršūninės lygtys.

§ 37. ELIPSĖ IR TIESĖ.

Išsprendę lygčių

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ir

$$y = mx + n$$

sistemą, gauname elipsės ir tiesės susikirtimo taškų koordinatas. Šaknų yra po dvi realines (kurios, be to, gali būti ir lygios) arba menamas, žiūrint kokia yra radikalų diskriminanta: teigiama (ir nulinė) ar neigiama.

Sakysime, kad diskriminanta yra teigiama, vadinasi, tiesė kerta dviejuose realiniuose taškuose elipsę. Tokios kertamosios, arba stygos, vidurio koordinatos yra

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2mn}{a^2m^2 + b^2} \text{ ir } y_3 = \frac{b^2n}{a^2m^2 + b^2}.$$

Padalinę y iš x, gauname

$$y_3 = -\frac{b^2}{a^2m}x_3.$$

Kadangi lygiagrečių stygų lygtys turi tuos pačius kampinius koeficientus ir vienos nuo kitų tesiskiria laisvuoju nariu ir ka-

dangi laisvasis narys n į paskutines lygtis neįeina, tai galima parašyti lygtys

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m} x, \qquad (10)$$

kurios reiškia tiesę, jungiančią lygiagrečių stygų vidurius. Bet tos lygtys taip pat reiškia tiesę, einančią per koordinatų sistemos pradžią. Pažymėję tas lygtis trumpiau

$$y = \mu x,$$

randame, jų susikirtimo su elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ koordinatas

$$x_{1,2} = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2\mu^2}} \quad \text{ir} \quad y_{1,2} = \pm \frac{\mu ab}{\sqrt{b^2 + a^2\mu^2}}.$$

Taigi kiekviena tiesė, einanti per koordinatų sistemos pradžią, kerta elipsę dviejuose simetriškuose taškuose. Todėl tokia tiesė vadinama elipsės s k e r s m e n i u, o koordinatų sistemos pradžia elipsės c e n t r u. Tad bet kurios elipsės skersmens lygtys yra

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m} x,$$

jei a ir b yra elipsės pusašės, o m kampinis koeficientas stygos, kurią skersmuo dalo pusiau.

Uždaviniai:

201. Kuriuose taškuose tiesė $5x + 6y = 30$ kerta elipsę $25x^2 + 36y^2 = 900$?

202. Kuriuose taškuose kerta elipsę $64x^2 + 100y^2 = 6400$ tiesė, kuri eina per židinį $(+c)$ sudarydama su x ašimi kampą $\varphi = 30^0$?

203. Kuriuose taškuose elipsė $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$ yra kertama stygos, dalančios teigiamąsias elipsės pusašis pusiau.

204. Rasti kvadrato, įrašyto į elipsę, kurios $a = 4$ ir $b = 3$, kraštinės ilgis.

205. Duota elipsė $81x^2 + 100y^2 = 8100$. Rasti ilgis jos skersmens, einančio per vidurį stygos $20y - 9x = 15$.

206. Parašyti lygtys stygos, kuri eina per elipsės $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ tašką $P(8; y>0)$, ir skersmens $y = 1{,}25x$ yra daloma pusiau.

§ 38. ELIPSĖS TANGENTĖ IR NORMALĖ.

Iš elipsės lygčių

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gauname

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Diferenciavę tas lygtis, gauname bet kurios elipsės tangentės kampinį koeficientą:

$$y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}.$$

Lygtis tangentės taške $(x_1 ; y_1)$ galime parašyti

$$y - y_1 = m_1(x - x_1);$$

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1).$$

Atskliautę ir pertvarkę tas lygtis, gauname

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}.$$

Kadangi $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, nes x_1 ir y_1 yra elipsės taško koordinatos, tai tangentės lygtys yra šios:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1. \qquad (11)$$

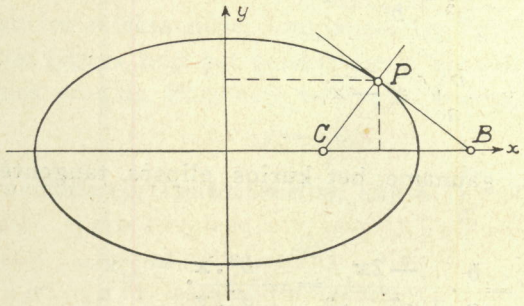
Jos lengva atsiminti, nes mažai tesiskiria nuo pačių elipsės lygčių. Norėdami rasti, kuriuose taškuose tangentė kerta elipsės ašis, turime į jos lygtis pakaitomis įstatyti $y_1 = 0$ ir $x_1 = 0$, nes tangentės susikirtimo su x ašimi ordinata lygi 0 ir susikirtimo su y ašimi abscisa lygi 0. Gauname:

$$x_0 = \frac{a^2}{x_1} \quad \text{ir} \quad y_0 = \frac{b^2}{y_1}.$$

Iš šių dviejų lygybių galime parašyti proporcijas

$$x : a = a : x_1 \text{ ir } y : b = b : y_1.$$

Iš visų tų lygčių matyti lengvas tangentės brėžimo būdas.



28 brėž.

28 brėžinyje PB yra tangentės ilgis, o PC — normalės. Pažymėję, kaip paprastai, liečiamojo taško koordinatas x_1 ir y_1 ir atsimindami, kad taškai B ir C yra tie, kurių $y = 0$, lengvai apskaičiuojame tangentės ir normalės ilgį:

$$PB = \sqrt{\left(\frac{a^2}{x_1} - x_1\right)^2 + y_1^2} = \sqrt{\left(\frac{a^2 - x_1^2}{x_1}\right)^2 + y_1^2}$$

ir

$$PC = \sqrt{\left[\frac{(a^2 - b^2)x_1}{a^2} - x_1\right]^2 + y_1^2} = \sqrt{\frac{b^4 x^2}{a^4} + y_1^2}.$$

Tangentės projekciją abscisų ašyje vadiname s u b t a n g e n t e, normalės — s u b n o r m a l i ą j ą, arba subnormale. Iš to paties 28 br. matyti, kad subtangentės AB ilgis yra

$$\frac{a^2}{x_1} - x_1 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$$

ir subnormalės AC ilgis

$$\frac{(a^2 - b^2)x_1}{a^2} - x_1 = \frac{-b^2 x_1}{a^2} = -\frac{b^2 x_1}{a^2}.$$

Uždavniai: 207. Parašyti lygtys lietėjos ir normalės

a) elipsės $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{121} = 1$ taške $P(5; y_1 > 0)$;

b) elipsės $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{100} = 1$ taške $P(x_1 < 0; 6)$;

c) elipsės $\frac{(x-4)^2}{36} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$ taške $P(x_1 < 0; -6)$.

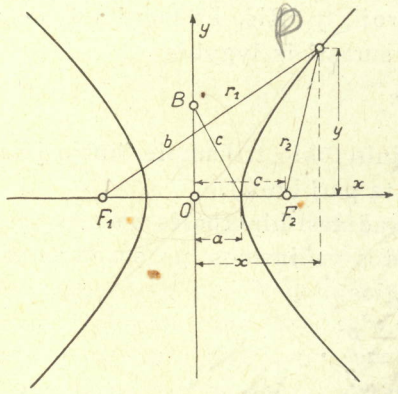
208. Suskaičiuoti tangentės, subtangentės, normalės ir subnormalės ilgiai elipsės

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \text{ taške } P(1;\ y > 0).$$

H I P E R B O L Ė

§ 39. HIPERBOLĖS LYGTYS.

Hiperbolė yra tokia kreivė, kurios taškų nuotolių nuo dviejų duotų pastovių taškų skirtumas yra pastovus dydis. Pastovieji taškai vadinami hiperbolės židiniais (fokusais). Pusė jų nuotolio vienas nuo antro vadinasi hiperbolės l i n i j i n i u e k s c e n t r i c i t e t u. Jis, paprastai, žymimas, kaip ir elipsėje, raide c. Tiesė, jungianti bet kurį hiperbolės tašką su vienu ar antru židiniu, vadinama ž i d i n i n i u s p i n d u l i u, arba r a d i j u v e k t o r u.



29 brėž.

Hiperbolės lygtis gauname panašiai, kaip elipsės. Abscisų ašimi imame tiesę, jungiančią hiperbolės židinius, ordinatų ašimi — statmenį, pakeltą iš židinių nuotolio vidurio. Pastovų nuotolių skirtumą vėl pažymėsime $2a$.

Tebūnie taškas $P(x;\ y)$ hiperbolės taškas (29 brėž.) Iš brėžinio matyti, kad to taško koordinatos patenkina lygtis

$$\sqrt{(c + x)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

Išsivadavę iš radikalų, gauname

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2 a^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0.$$

Kadangi trikampyje dviejų kraštinių skirtumas yra mažesnis negu trečioji kraštinė, tai

$$r_1 - r_2 = 2a < 2c,$$

vadinasi, $a < c$. Todėl trumpumo dėliai nebe $a^2 - c^2$, bet $c^2 - a^2$ pakeičiame b^2 ir, padalinę visus lygčių narius iš a^2b^2, gausime centrines hiperbolės lygtis:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (12)$$

Iš hiperbolės lygčių gauname

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Iš čia matyti, kad kiekvieną, teigiamą ir neigiamą, x reikšmę atitinka po dvi vienodo absoliutinio didumo bet priešingais ženklais y reikšmės. Taigi hiperbolė yra simetriška kreivė abiejų koordinatų sistemos ašių atžvilgiu. Kai $y = 0$, $x = \pm a$, vadinasi, hiperbolė kerta x ašį dviejuose taškuose, kurie vadinami elipsės v i r š ū n ė m i s. Tuo tarpu, kai $x = 0$, y išeina menamas, tad hiperbolė y ašies iš tikrųjų visai nekerta (žiūr. 29 brėž.). Todėl hiperbolės simetrijos ašys — viena, x ašis, vadinama p a g r i n d i n e tikrąja ašimi, antroji, y ašis, š a l u t i n e menamąja. Atkarpos b ilgis galima surasti iš lygybės

$$b^2 = c^2 - a^2,$$

iš kurios matyti, kad b yra statinis tokio trikampio, kurio įžambinė c ir antras statinis a (žiūr. tą patį brėž.).

Ašių susikirtimo taškas O vadinasi hiperbolės c e n t r u.

Židininės hiperbolės ordinatos vadinamos p u s p a r a m e t r i a i s. Jos, kaip ir elipsės, lygios

$$p = \pm \frac{b^2}{a}.$$

Turint hiperbolės lygtis, lengva sukonstruoti pati hiperbolės kreivė. Ji yra dvišakė linija, kurios galai nueina į begalybę (žiūr. 29 br.).

Perkėlę koordinatų sistemą iš taško O į tašką A, nepasukdami koordinatų ašių, gauname hiperbolės viršūnines lygtis:

$$v^2 = 2pu + \frac{p^2}{a} u^2,$$

arba

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2. \qquad (13)$$

Uždaviniai.

209. Išbrėžti hiperbolę, kurios $a = 2$ ir $c = 3$.

210. Įrodyti, kad tiesė, einanti lygiagrečiai su x ašimi, kerta hiperbolę dviejuose realiniuose taškuose.

211. Parašyti centrinės hiperbolės lygtys, kai $a=4$ ir $p=25$.

212. Kokią liniją reiškia lygtys: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$?

213. Rasti lygtys hiperbolės, kurios centro koordinatos m ir n ir kurios pagrindinė ašis lygiagretė su x ašimi.

14. Hiperbolė $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ eina per taškus $A(18; 20)$ ir $B(-24; -15)$. Rasti jos ašys.

§ 40. HIPERBOLĖ IR TIESĖ.

Hiperbolės

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ir tiesės

$$y = mx + n$$

susikirtimo taškų koordinatas randame, išsprendę tų dviejų lygčių sistemą. Gauname du šaknų dvejetus, vadinasi, tiesė kerta hiperbolę, taip pat, kaip ir elipsę, dviejuose taškuose. Ar jie realūs, pareina nuo pošaknio tiekybės, arba diskriminantos, $n^2 + b^2 - a^2m^2$. Kai ji teigiama, turime dvi realines šaknis, kai ji neigiama, turime dvi menamas šaknis.

Panašiai, kaip elipsėje, galima įrodyti, kad tiesė, jungianti lygiagrečių hiperbolės stygų vidurius, eina per koordinatų sistemos pradžią ir dalo hiperbolę į simetriškas dalis. Todėl tokia tiesė vadinama hiperbolės skersmeniu. Jo lygtys

$$y = \frac{b^2}{a^2m} x.$$

Skersmenys, kaip ir ašys, gali kirsti hiperbolę realiniuose arba tik menamuose taškuose. Pirmuoju atveju jie vadinasi pagrindiniais, antruoju — šalutiniais.

§41. HIPERBOLĖS TANGENTĖ, NORMALĖ IR ASIMPTOTĖS.

Hiporbolės tangentės (lietėjos) ir normalės lygtis randame lygiai tokiu pat būdu, kaip elipsės. Pažymėję liečiamojo taško koordinatas x_1 ir y_1, gauname lygtis tangentės

$$\frac{x_1 x}{a_2} - \frac{y_1 y}{b_2} = 1 \qquad (14)$$

ir normalės

$$y - y_1 = -\frac{a_2 y_1}{b_2 x_1}(x - x_1). \qquad (15)$$

Rasime lygtis tangentės be galo tolimame hiperbolės taške. Iš paprastųjų tangentės lygčių gauname

$$y = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x - \frac{b^2}{y_1},$$

o iš hiperbolės lygčių turime

$$y_1 = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2},$$

todėl

$$y = \frac{b^2 x_1}{\pm ab\sqrt{x_1^2 - a^2}} x - \frac{b^2}{y_1}.$$

Kai $x_1 \to \infty$, tai $\sqrt{x_1^2 - a^2} \to x_1$ ir $y_1 \to \infty$, ir tuo atveju tangentės lygtys virsta šiomis paprastomis lygtimis

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \qquad (16)$$

Lygtys $y = +\frac{b}{a}x$ ir $y = -\frac{b}{a}x$ reiškia dvi tieses, kurių kiekviena liečia hiperbolę dviejuose be galo tolimuose taškuose; jos vadinamos hiperbolės a s i m p t o t ė m i s. Kaip matyti iš lygčių, asimptotės yra tiesės, kurios eina per koordinatų pradžią ir kurių vienos kampinis koeficientas $+\frac{b}{a}$, o antros $-\frac{b}{a}$. Nusibrėžus hiperbolės asimptotes, lengviau brėžti ir tarp jų gulinčią hiperbolės kreivę.

Uždaviniai:

215. Įrodyti, kad lygtys

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

reiškia drauge abi hiperbolės asimptotes.

216. Parašyti tangentės ir normalės lygtys hiperbolės $25x^2 - 16y^2 = 400$ taške $P(8;\ y_1 < 0)$.

217. Parašyti lygtys hiperbolės, jei ji liečiama tiesės $5x - 4y = 16$ taške $P(5;\ 2\frac{1}{4})$.

218. Parašyti lygtys hiperbolės, jei jos taško $A(8;\ +y_1)$ subtangentė lygi 3,5 ir subnormalė lygi 2.

219. Kuriame taške ir kuriuo kampu susikerta hiperbolės $x^2 - 4y^2 = 144$ tangentės taškuose $P_1(13;\ y_1 > 0)$ ir $P_2(-13;\ y_2 > 0)$?

220. Kurį kampą sudaro hiperbolės $16x^2 - 25y^2 = 400$ asimptotės?

§ 42. LYGIAKRAŠTĖS HIPERBOLĖS ASIMPTOTINĖS LYGTYS.

Hiperbolė, kurios ašys lygios, vadinasi l y g i a k r a š t ė. Jos lygtys yra

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1, \qquad (17)$$

arba $x^2 - y^2 = a^2$.

Jos asimptočių lygtys yra

$$y = \pm x.$$

Tad lygiakraštės hiperbolės asimptotės yra stačiakampės koordinatų sistemos pusiaukampinės; jos yra viena antrai statmeniškos.

Imsime lygiakraštės hiperbolės asimptotes naujos koordinatų sistemos ašimis. Jos į buvusiąją sistemą yra pasuktos — 45^0 kampu. Pasinaudodami § 11 lygtimis, išreiškiame buvusios koordinatų sistemos koordinatas naujomis koordinatomis ir gauname:

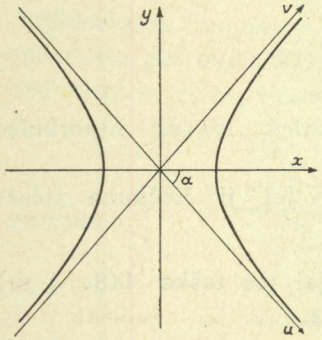
$$(u\cos 45^0 + v\sin 45^0)^2 - (-u\sin 45^0 + u\cos 45^0)^2 = a^2$$

$$u^2\cos^2 45^0 + 2uv\cos 45^0 \sin 45^0 + v^2\sin^2 45^0 -$$

$$- u^2\sin^2 45^0 + 2uv\sin 45^0\cos 45^0 - v^2\cos^2 45^0 = a^2.$$

Kadangi $\sin 45^0 = \cos 45^0$, tai lygtyse galime sujungti eilę panašių narių ir gauti:

$$4uv\sin 45^0 \cos 45^0 = a^2$$
$$2uv\sin 90^0 = a^2$$
$$uv = \frac{a^2}{2}.$$



30 brėž.

Pažymėję naujos koordinatų sistemos koordinatas x ir y, turime

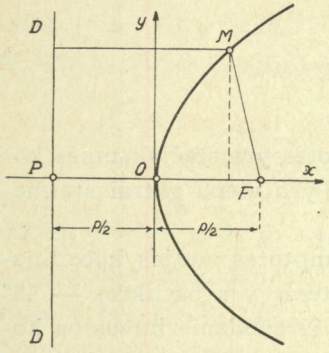
$$xy = \frac{a^2}{2}. \qquad (18)$$

Tai asimptotinės lygiakraštės hiperbolės lygtys.

PARABOLĖ

§ 43. PARABOLĖS LYGTYS.

Parabolė yra tokia kreivė, kurios taškai yra lygiai nutolę nuo duotos tiesės ir nuo vieno duotojo taško. Duotoji parabolės tiesė vadinama jos d i r e k t r i s a, taškas — ž i d i n i u.



31 brėž.

Norėdami gauti parabolės lygtis, nuleisime iš židinio F (31 brėž.) ant direktrisos DD statmenį. Jį imsime abscisų ašimi. Ordinatų ašį gausime pakėlę statmenį iš vidurio atkarpos PF. Nuotolį PF, židinio nuo direktrisos, žymėsime p. Paėmę bet kurį parabolės tašką $M(x; y)$, turėsime

$$MD = MF$$

Iš brėžinio matyti, kad

$$MD = \frac{p}{2} + x$$

ir $$MF = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2}.$$

Tad parabolės lygtys yra

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2}$$

$$\left(\frac{p}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2$$

$$y^2 = 2px. \qquad (19)$$

Iš parabolės lygčių matyti, kad parabolė eina per koordinatų pradžią simetriškai x-ų ašiai, nes kiekvieną teigiamą x-o reikšmę atitinka po vieną lygią, teigiamą ir neigiamą, y reikšmės. Abscisai be galo didėjant, ordinata taip pat be galo didėja, vadinasi, parabolė yra atdara kreivė. Tačiau ji nėra dvišakė, kaip hiperbolė: kai x yra neigiamas, y yra menamas.

Kadangi x ašis yra parabolės simetrijos ašis, tai ji vadinama parabolės a š i m i, taškas O yra jos v i r š ū n ė. Iš parabolės lygčių išskaičiavę židininę ordinatą $\left(x = \frac{p}{2}\right)$, randame

$$y = \pm p,$$

vadinasi, p yra pusparametris, kaip elipsėj ir hiperbolėj. Pusparametris pats vienas nustato parabolės pavidalą.

Sugretinę elipsės, parabolės ir hiperbolės viršūnines lygtis

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2,$$
$$y^2 = 2px$$

ir $$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$$

matome, kad parabolė yra tarpinė kreivė tarp elipsės ir hiperbolės. Kadangi numerinis ekscentricitetas elipsės

$$e = \frac{c}{a}$$

yra mažesnis už vienetą, o hiperbolės didesnis už vienetą, tai parabolės numerinį ekscentricitetą galime laikyti lygiu vienetui.

Uždaviniai:

221. Parabolės židinio nuotolis nuo jos viršūnės yra 3. Parašyti parabolės lygtys.

222. Ar stovi taškai (2; 3); (—1; 2); (3; —1); (1,8; —3) parabolėje $y^2 = 5x$?

223. Perkeliame koordinatų sistemos pradžią į židinį, nepakeisdami ašių linkmės. Rasti šiuo atveju parabolės lygtys.

224. Parašyti viršūninės parabolės lygtys, žinant jos tašką $P(x_1 ; y_1)$?

225. Išbrėžti parabolės, kurių lygtys yra $y^2 = 3x$; $y^2 = 5x$; $y^2 = 0{,}5x$.

226. Išbrėžti parabolė $y = x^2$ ir rasti jos židinys ir direktrisė.

227. Įrodyti, kurią kreivę reiškia lygtys

$$ay^2 + by + cx + d = 0.$$

§ PARABOLĖ IR TIESĖ.

Lygčių

$$y^2 = 2px$$

ir

$$y = mx + n$$

sistemos šaknys yra parabolės ir tiesės susikirtimo taškų koordinatos. Šaknų diskriminanta $p^2 - 2mnp$ gali būti teigiama, nulinė ir neigiama; vadinasi, tiesė kerta parabolę dviejuose taškuose, ją liečia viename taške arba nieko bendra su ja neturi.

Sakysime, kad tiesė kerta parabolę dviejuose taškuose. Tų taškų stygos vidurio ordinata gaunama

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{m}.$$

Vadinasi, stygos vidurio ordinata nepareina nuo stygos laisvojo nario. Turėdami eilę lygiagrečių stygų, kurių lygtys vienos nuo kitų tesiskiria laisvuoju nariu n, gauname jų vidurio vis tą pačią ordinatą, būtet, $\frac{p}{m}$. Taigi, lygiagrečių stygų vidurio koordinatos tenkina lygtis

$$y = \frac{p}{m},$$

kurios reiškia tiesę, lygiagretę x-ų ašiai.

Tiesė, jungianti elipsės arba hiperbolės lygiagrečių stygų vidurius, buvo vadinama tų kreivių skersmeniu. Iš analogijos tiesė $y = \frac{p}{m}$ taip pat vadinama parabolės skersmeniu. Ji kerta parabolę tik viename taške, tuo tarpu kai kitos tiesės ją kerta

dviejuose taškuose. Parabolės tangentės ir normalės lygtis galime gauti tuo pačiu keliu, kaip elipsės arba hiperbolės.

$$y^2 = 2px ;$$

$$y = \sqrt{2px} ;$$

$$y' = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}.$$

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1) ;$$

$$y_1 y - y_1^2 = px - px_1 + px_1 - px_1.$$

Kadangi $y_1^2 - 2px_1 = 0$, tai

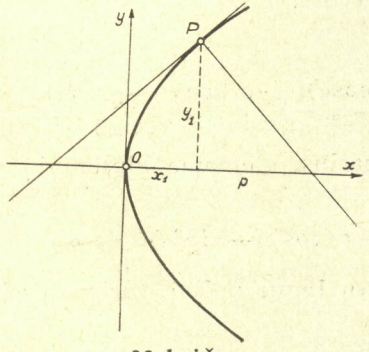
$$\underline{y_1 y = p(x + x_1)} \qquad (20)$$

yra parabolės tangentės

ir $$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$$

normalės lygtys.

Įstatę į tangentės lygtis pakaitomis $y = 0$ ir $x = 0$, gauname ilgį atkarpų, kurias ji atkerta x-ų ir y-ų ašyse; būtent, $-x_1$ ir $\frac{y_1}{2}$. Taigi, tangentė atkerta abscisų ašyje į kairę nuo koordinatų pradžios atkarpą, kuri yra lygi lietimo taško abscisai, o ordinatų ašyje — atkarpą, lygią lietimo taško ordinatos pusei. Iš čia eina labai lengvas tangentės brėžimo būdas.



32 brėž.

Normalė

$$\underline{y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)} \qquad (21)$$

atkerta abscisų ašyje atkarpą $x_1 + p$. Iš brėžinio matyti, kad parabolės subnormalė visada yra lygi parabolės pusparametriui p.

Uždaviniai:

228. Duota parabolė $y^2 = 8x$ ir skersmuo $y + 3 = 0$. Parašyti lygtys stygos, einančios per tašką $(5; 2)$, kuri to skersmens daloma pusiau.

229. Įrodyti, kad tiesė $11x - 6y + 9 = 0$ liečia parabolę $y^2 = 11x$ ir rasti liečiamojo taško koordinatos.

230. Įrodyti, kad parabolės $y = x^2$ tangentės lygtys taške $(x_1; y_1)$ yra $y + y_1 = 2x_1x$.

231. Kuriuo kampu kerta parabolė $y^2 = 8x$ apskritimą $x^2 + y^2 = 128$?

§ 45. BENDROSIOS ANTROJO LAIPSNIO LYGTYS.

Apskritimo, elipsės, hiperbolės ir parabolės lygtys yra paprastai antrojo laipsnio nepilnos lygtys, nes jose dažniausiai trūksta kintamųjų sandaugos ir tų kintamųjų pirmojo laipsnio narių. Tačiau ir tų narių esimas, kaip ne kartą galėjome įsitikinti, ypač spręsdami uždavinius, visai nereiškia kokios naujos kreivės, o tik kad koordinatų sistema nesutampa su ta, kuri yra, paprastai, pasirenkama, sudarant minėtų kreivių lygtis.

Sakysim, turime pilnas dviejų kintamųjų antrojo laipsnio lygtis

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Koordinatų sistemą pasukę kampu α, koordinatas pakeičiame taip:

$$x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$$
$$y = u\sin\alpha + v\cos\alpha.$$

Tuo būdu gauname lygtis

$$a(u\cos\alpha - v\sin\alpha)^2 + b(u\sin\alpha + v\cos\alpha)^2 + c(u\cos\alpha - v\sin\alpha) \cdot$$
$$(u\sin\alpha + v\cos\alpha) + d(u\cos\alpha - v\sin\alpha) + e(u\sin\alpha + v\cos\alpha) + f = 0.$$

Atskliautę ir sutraukę panašius narius, gauname kintamųjų u ir v sandaugos koeficientą:

$$-2a\cos\alpha\sin\alpha + 2b\sin\alpha\,\mathrm{soc}\alpha + c(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Norėdami, kad tas koeficientas būtų lygus nuliui, turime pasirinkti atitinkamą kampą α, būtent:

$$c\cos 2\alpha - (a - b)\sin 2\alpha = 0$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{c}{a - b} \qquad (22)$$

Vadinasi, pasukus koordinatų sistemos ašis kampu α, kuris gaunamas iš lygybės

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{c}{a - b},$$

kvadratinėse dviejų kintamųjų lygtyse išnyksta abiejų kintamųjų sandaugos narys. Pažymėję naujuosius koeficientus raidėmis $k, l, m, \ldots$, gauname lygtis šio pavidalo:

$$ku^2 + lv^2 + mu + nv + g = 0.$$

Sakysim, kad nė vienas iš šių lygčių koeficientas nelygus nuliui. Perkelsime koordinatų sistemos pradžią į naują vietą. Tada tebūnie

$$u = x - p \quad \text{ir} \quad v = y - q.$$

Gauname

$$k(x-p)^2 + l(y-q)^2 + m(x-p) + n(y-q) + g = 0,$$
$$kx^2 + ly^2 + (m - 2kp)x + (n - 2lq)y + kp^2 + lq^2 - mp - nq + g = 0.$$

Šiose lygtyse x ir y koeficientus galime prilyginti nuliui ir gauname

$$p = \frac{m}{2k}; \quad q = \frac{n}{2l}.$$

Pačios lygtys įgyja pavidalą

$$kx^2 + ly^2 = s.$$

Jei $s \neq 0$, gauname

$$Ax^2 + By^2 = 1.$$

Šių lygčių reikšmė mums jau pažįstama:

1) jei A ir B abu teigiami — turime elipsę;
2) jei A ir B ženklai nevienodi — hiperbolę;
3) kai A ir B yra neigiami, tai lygtys nereiškia jokios realinės kreivės, nes dviejų neigiamų narių suma negali būti lygi 1;
4) kai, pagaliau, koeficientai A ir B vienas antram lygūs — turime apskritimą.

Dabar turime dar išnagrinėti tuos atvejus, kai kurie nors paskutinių lygčių koeficientai lygūs nuliui.

1. Jei lygčių

$$Ax^2 + By^2 = 1,$$

A arba B lygu nuliui, tai gauname

$$y = \frac{1}{\sqrt{B}} \quad \text{arba} \quad x = \frac{1}{\sqrt{A}};$$

tai yra lygtys tiesių, lygiagrečių su koordinatų sistemos ašimis,

2. Jei

$$Ax^2 + By^2 = 0,$$

tai skiriame du atvejus: a) A ir B yra vienodų ženklų, b) A ir B yra priešingų ženklų. Vienu atveju lygtis galime parašyti

$$s^2x^2 + t^2y^2 = 0$$

ir antruoju

$$s^2x^2 - t^2y^2 = 0.$$

Iš šių lygčių pirmosios patenkinamos tik koordinatų sistemos pradžios taško koordinatomis, o antrosios reiškia dvi tieses

$$sx + ty = 0 \quad \text{ir} \quad sx - ty = 0,$$

einančias per koordinatų sistemos pradžios tašką (palygink asimptočių lygtis).

3. Dabar grįžtame prie lygčių

$$ku^2 + lv^2 + mu + nv + g = 0.$$

Jei jų koeficientai k ir l lygūs nuliui, tai lieka tiesės lygtys. Gali būti ir vienas iš tų koeficientų lygus nuliui. Sakysime, $k = 0$ ir $l \neq 0$; padalę visus lygčių narius iš l, gauname

$$v^2 + m_1u + n_1v + g_1 = 0.$$

Transformuojame lygtis taip, kad

$$u = x - a \quad \text{ir} \quad v = y - b.$$

Gauname

$$y^2 - 2by + b^2 + m_1x - am_1 + n_1y - bn_1 + g_1 = 0.$$

Čia galima koeficientai

$$n_1 - 2b \quad \text{ir} \quad g_1 - bn_1 - am_1$$

prilyginti nuliui, tada

$$b = \frac{n_1}{2} \quad \text{ir} \quad a = \frac{g_1 - bn_1}{m_1}$$

(m_1 neturi būti lygus nuliui) ir lygtys virsta parabolės lygtimis

$$y^2 = -m_1x,$$

arba

$$y^2 = 2px \qquad \left(p = -\frac{m_1}{2}\right).$$

Jei šiose lygtyse $m_1 = 0$, tai dar gauname abscisų ašies lygtis

$$y = 0.$$

Be to, kai $m = 0$, iš aukščiau turėtų lygčių

$$v^2 + m_1u + n_1v + g_1 = 0$$

lieka

$$v^2 + n_1v + g_1 = 0,$$

arba

$$v = -\frac{n}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{4} - g_1},$$

bet tai yra dvi tiesės, lygiagretės su abscisų ašimi, jei tik pošaknio tiekybė teigiama.

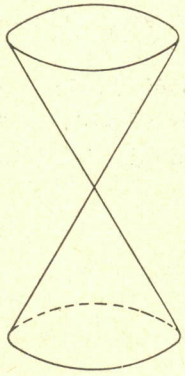
Jei būtume šio skyrelio pradžioje ėmę $k \neq 0$ ir $l = 0$, tai būtumė gavę panašius rezultatus (prašom įsitikinti!).

Suglaudę visus rezultatus į krūvą, gauname, kad lygtys

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

gali reikšti: apskritimą, elipsę, hiperbolę, parabolę, įvairias tieses ir tašką. Tai vis pareina nuo koeficientų. Gali, pagaliau, pasitaikyti ir tokie koeficientai, kad lygtys nereiškia jokios realinės linijos ar taško.

Paėmę du stačius kūgius, sudurtus viršūnėmis, ir įvairiai juos perpiaudami, galime kaip tik gauti visa tai, ką gali reikšti antrojo laipsnio lygtys. Dėl to lygtys



33 brėž.

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

dar vadinamos kūgių piūvių lygtimis.

Uždaviniai:

232. Ištirti geometrinė lygčių reikšmė:

a) $2x^2 + 3xy + y^2 + 5y - 3x + 2 = 0$,
b) $xy - 2x^2 + 7x - 3y - 3 = 0$ ir
c) $9x^2 + 16y^2 = 36x + 48y$.

233. Kreivės $25y^2 + x^2 = 25$ ketvirtame ketvirty taško A abscisa $= 3$; per tašką A išvesta tos kreivės liečiamoji, kertanti abscisų ašį taške B. Rasti lygtys apskritimo, kurio centras yra taške B ir kurio spindulys lygus duotos kreivės židinių nuotoliui.

234. Elipsės taškai yra $A(1{,}8;\ 1{,}6)$ ir $B(2\frac{10}{13};-\frac{10}{13})$. Parašyti lygtys hiperbolės, kurios židinių nuotolis lygus tos elipsės židinių nuotoliui ir kurios tikroji pusašė $=2$.

235. Kreivės lygtys yra $x^2+4y^2=16$. Iš taško $A(2;13)$ išbrėžtos dvi tiesės, liečiančios kreivę taškuose B ir C. Parašyti lygtys tiesės, jungiančios vidurius stygų, einančių lygiagrečiai su styga BC.

236. Kreivėje $9x^2+25y^2=225$ išvestas skersmuo, dalantis pusiau stygas, kurių kampinis koeficientas $-0{,}12$. Šito skersmens galai ir taškas $M(3;-1)$ yra trikampio viršūnės. Rasti to trikampio plotas.

237. Kreivės lygtys yra $y^2=4x$; jos stygos galų abscisos yra lygios 9. Stygos vidurys B sujungtas su centru P apskritimo

$$x^2-2x+y^2+2y-2=0.$$

Rasti lygtys statmens, nuleisto iš taško $A(1;2)$ ant tiesės BP.

238. Kreivės $2x^2+y^2=225$ ir $y^2=16x$ susikerta. Per susikirtimo tašką A, esantį pirmajame ketvirty, išbrėžta antrosios kreivės tangentė. Parašyti lygtys hiperbolės, kurios židinių nuotolis yra $2\sqrt{13}$ ir kurios asimptotė yra lygiagretė tai tangentei.

239. Kreivės $x^2+36y^2=144$ asimptotės kerta tiesę $x+2y=8$ taškuose A ir B. Atkarpa AB yra styga elipsės, kurios ašių ilgumas reikia surasti.

240. Per tašką $A(1,8;-1,6)$, stovintį elipsėj, kurios mažoji ašis lygi 4, išvesta normalė, kertanti kreivės $x^2-4y^2=16$ asimptotes taškuose B ir C. Rasti plotas trikampio OBC, jei O yra koordinatų sistemos pradžios taškas.

IV SKYRIUS

Funkcijų ekstremai.

§ 46. FUNKCIJŲ DIDĖJIMAS BEI MAŽĖJIMAS IR JŲ IŠVESTINĖ.

Jei, argumentą didinant, didėja ir funkcija, tai ją vadiname d i d ė j a n č i a, priešingai — m a ž ė j a n č i a. Sakysim, $f(x)=a^x$, *kai* $a>1$, yra didėjančioji ir, kai $a<1$, mažėjančioji.

Daugelis funkcijų vietomis gali būti didėjančiomis, kitur — mažėjančiomis. Tada kalbame apie atskirus funkcijos intervalus*). Pavyzdžiui, $f(x)=\sin x$ yra tokia periodinė funkcija, kuri lygiais intervalais dalosi į didėjančias ir mažėjančias dalis. Sakysim, kai $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq+\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ yra didėjančioji funkcija, kai $\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{3\pi}{2}$, toji pati funkcija yra mažėjančioji.

Jau antrajame skyriuje galima buvo pastebėti, kad tarp funkcijos kitimo pobūdžio ir jos išvestinės yra tam tikras sąryšis. Tebūnie $f(x)$ duotajame intervale didėjančioji funkcija; padidinę jos argumentą $\triangle x$, gauname teigiamą funkcijos prieauglį $f(+\triangle x)-f(x)$, vadinasi,

$$f'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$$

turi būti teigiamas, nes santykio abu nariai yra to paties ženklo. Jei kita funkcija $\varphi(x)$ kuriame nors intervale yra mažėjanti, tai tame pačiame intervale $\varphi(x+\triangle x)-\varphi(x)$ yra neigiamas, kai $\triangle x>0$, tad jos išvestinė

$$\varphi'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\varphi(x+\triangle x)-\varphi(x)}{\triangle x}$$

yra neigiama. Savaime aišku, kad ir atvirkščias tvirtinimas yra teisingas: j e i f u n k c i j o s i š v e s t i n ė y r a t e i g i a m a,

*) tarpus.

tai ji pati šitame intervale yra didėjanti, jei — neigiama, tai — mažėjanti. Tuo būdu iš išvestinės ženklo pažįstame, ar duotoji funkcija duotajame intervale yra teigiama, ar neigiama. Pavyzdžiui, turime

$$f(x) = x^2 - 4x + 2;$$

norime žinoti funkcijos kitimo pobūdį, kai $x = 1$. Gauname:

$$f'(x) = 2x - 4,$$

$$f'(x = 1) = -2$$

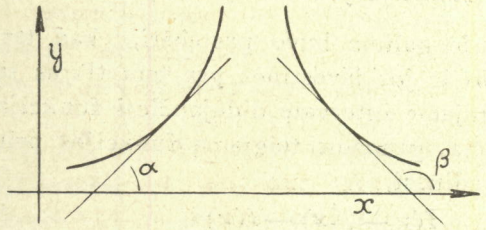
arba

$$f'(1) < 0.$$

Tad, kai $x = 1$, ši funkcija yra mažėjančioji. Tačiau toji pati funkcija, kai $x = 3$, yra jau didėjančioji, nes

$$f'(3) = 2 > 0.$$

Geometriškai didėjančiąją funkciją vaizduoja kylanti kreivė, mažėjančiąją — slūgstanti. Kylančios kreivės liečiamosios linkmės kampas yra smailas, slūgstančios — bukas (žiūr. 34 brėž.). Kadangi funkcijos išvestinė geometriškai reiškia liečiamosios linkmės kampo tangentą ir kadangi, be to, tangentas smailo kampo yra teigiamas ir buko — neigiamas, tai ir iš geometriškos funkcijos ir jos išvestinės reikšmės matyti, jog didėjančios funkcijos išvestinė yra teigiama, mažėjančios — neigiama ir atvirkščiai.



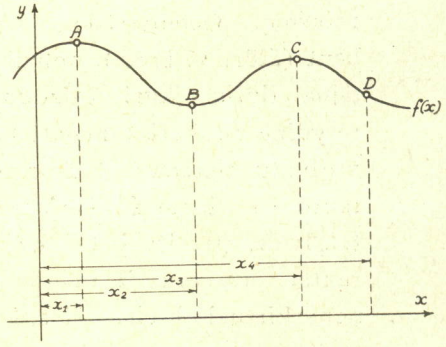
34 brėž.

Uždaviniai: 241. Ištirti funkcijos $f(x) = x^2$ kitimo pobūdis. Kitaip sakant, rasti jos didėjimo ir mažėjimo intervalai.

242. Rasti funkcijos $x^2 \sin 2x$ kitimo pobūdis, kai $x = 0$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$; π.

§ 47. FUNKCIJOS EKSTREMAI.

Ta pati funkcija gali viename intervale didėti, antrame mažėti, toliau vėl didėti. Žinome, sakysim, kad goniometrinės funkcijos periodiškai didėja ir vėl mažėja. Tokios funkcijos turi reikšmių, kurios už gretimas reikšmes yra arba didesnės, arba mažesnės. Jei kuri funkcijos reikšmė yra didesnė už gretimas jos reikšmes, tai tą reikšmę vadiname maksimu (lotyniškai maximum — daugiausiai), jei mažesnė — minimu (minimum — mažiausiai). Drauge maksimus ir minimus vadiname ekstremais (extremum — kraštutiniškai). 35 brėžiny turime atvaizduotą vietomis didėjančią, vietomis mažėjančią funkciją. Matome, kad taškai A, B, C, D vaizduoja funkcijos ekstremus: A ir C maksimus, B ir D minimus. Iš brėžinio matyti, kad $f(x_1)$ ir $f(x_3)$ yra didesnės už gretimas tos pačios funkcijos reikšmes, o $f(x_2)$ ir $f(x_4)$ — mažesnės. Dėl to pirmosios vadinamos maksimais, antrosios — minimais. Funkcija $\sin x$ turi maksimus, kai $x = \frac{\pi}{2} \pm 2n\pi$ ir minimus, kai $x = \frac{3\pi}{2} \pm 2n\pi$. Ne kiekviena funkcija turi ekstremų. Pav., funkcija $y - 2x + 1 = 0$ neturi nei maksimo, nei minimo, nes didėjant x-ui ji visą laiką didėja. Tokios funkcijos vadinasi monotoninėmis (monotoniškai didėjančiomis arba mažėjančiomis). Viena ir ta pati funkcija, vadinasi, gali turėti arba neturėti ekstremų. Jei ekstremų ji turi, tai jų skaičius gali būti įvairus: nuo vieno ligi begalybės; $f(x) = x^2$, pav., teturi vieną minimą, o $f(x) = \sin x$ turi begalo daug maksimų ir minimų. Patys maksimai arba minimai gali būti savo tarpe lygūs ir nelygūs.

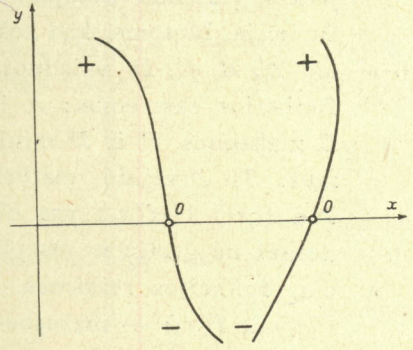


35 brėž.

Jei funkcija, kurį laiką didėjusi, pradeda mažėti, tai ji turėjo būti pasiekusi tam tikrą didžiausią reikšmę, maksimą. Atvirkščiai, jei funkcija kurį tarpą buvo mažėjusi, paskui vėl pradeda didėti, tai ji turi minimą. Kadangi didėjančios funkcijos

išvestinė yra teigiama, o mažėjančios neigiama, tai funkcijai einant per maksimą, jos išvestinė keičia savo ženklą iš pliuso į minusą. Atvirkščiai, išvestinės ženklas keičiasi iš minuso į pliusą, kai funkcija eina per minimą. Pav., funkcijos $y = \sin x$ išvestinė yra $y' = \cos x$. Šitos išvestinės ženklas keičiasi iš pliuso į minusą, kai x eina per $\frac{\pi}{2}$, iš minuso į pliusą, kai x eina per $\frac{3\pi}{2}$ ir t.t., tad funkcija $\sin x$ turi maksimą, kai $x = \frac{\pi}{2}$, minimą, kai $x = \frac{3\pi}{2}$ ir t.t.

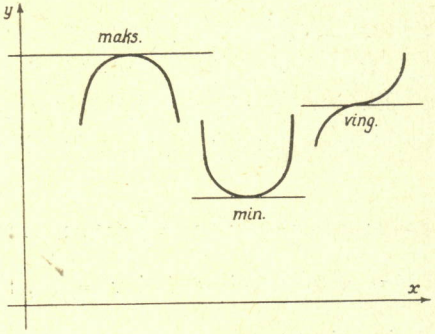
Savaime aišku, jei kuri tolydinė funkcija iš teigiamos pasidaro neigiama arba atvirkščiai, tai ji turi turėti ir nulinę reikšmę. Geometriškai kalbant (žiūr. 36 brėž.), netrukstama linija (kuri vaizduoja tolydinę funkciją) negali koordinatų sistemoj iš I kvadranto, kuriame funkcija yra teigiama, pereiti į IV kvadrantą, kuriame ji neigiama, neperkirtusi abscisų ašies, kurioj funkcijos reikšmės lygios nuliui. Kaip tik kurios nors funkcijos, turinčios ekstremų, išvestinė ir yra toki tolydinė funkcija, kuri keičia savo ženklą. Ji keičia savo ženklą kaip tik tada, kai pati duotoji funkcija yra ekstreminė. Iš to matyti: kai funkcijos reikšmė yra ekstreminė (maksimas ir minimas), tai jos išvestinė lygi nuliui. Ir atvirkščiai: būtina sąlyga, kad funkcija turėtų ekstremų, yra, kad jos išvestinė būtų lygi nuliui. Ši sąlyga yra būtina, bet neužtenkama, nes gali pasitaikyti, kad funkcijos išvestinė gali būti lygi nuliui, bet pati funkcija gali ekstremų ir neturėti. Mat, be to, dar reikia, kad išvestinės ženklas, einant jai per nulį keistųsi iš teigiamo į neigiamą (maximum) arba iš neigiamo į teigiamą (minimum).



36 brėž.

Visa sutraukę krūvon, randame: funkcijos kitimo pobūdį pažįstame iš išvestinės ženklo; jei tačiau išvestinė lygi nuliui tai

toje vietoje funkcija nei didėja, nei mažėja (geometriškai: liečiamosios linkmės kampas lygus 0, ji lygiagretė su abscisų ašimi), vadinasi turi maksimą, minimą arba vingį, jei išvestinės ženklas nesikeičia (37 brėž.).



37 brėž.

Kaip tiriamos funkcijos, ypač kaip surandamos vertingiausios jų ekstremų ir vingių reikšmės, pailiustruosime atskirais pavyzdžiais.

1. Turime funkciją

$$f(x) = (x^2 - 1)^2.$$

Norėdami rasti jos ekstremus, diferenciuojame funkciją ir imame išvestinę, lygią nuliui.

$$f'(x) = 2(x^2 - 1) \,.\, 2x;$$
$$f'(x) = 4x(x^2 - 1).$$
$$4x(x^2 - 1) = 0;$$
$$x_1 = 0;$$
$$x_2 = +1;$$
$$x_3 = -1.$$

Radome, kad funkcijos išvestinė lygi nuliui, kai argumentas lygus 0, arba $+1$, arba -1. Ištirsime išvestinės ženklą tų reikšmių aplinkumoje. Tuo reikalu argumento rastąsias reikšmes sumažinsime ir padidinsime neaprėžtai mažu dydžiu $\triangle x$.

$$1)\quad 4(-\triangle x)(\triangle^2 x - 1) > 0;$$
$$4(\triangle x)(\triangle^2 x - 1) < 0.$$

Iš čia matome, kad, x-ui einant per nulį, išvestinės ženklas keičiasi iš teigiamo į neigiamą, vadinasi, $f(0)$ yra maksimas. Rasime dar tą maksimą:

$$f(0) = 1.$$

$$2)\quad 4(1 - \triangle x)\,[(1 - \triangle x)^2 - 1] = 4(1 - \triangle x)(-2\triangle x + \triangle^2 x) < 0,$$

nes $1 - \triangle x > 0$ ir $-2\triangle x + \triangle^2 x < 0$;

$$4(1 + \triangle x)\,[(1 + \triangle x)^2 - 1] = 4(1 + \triangle x)(2\triangle x + \triangle^2 x) > 0.$$

Čia išvestinės ženklas keičiasi, x-ui einant per $+1$, iš neigiamo į teigiamą, tad $f(+1)$ yra minimas. Surasime jį:

$$f(+1)=0.$$

3) $4(-1-\triangle x)\,[(-1-\triangle x)^2-1]=-4(1+\triangle x)\,(2\triangle x+\triangle^2 x)<0;$

$4(-1+\triangle x)\,[(-1+\triangle x)^2-1]=4(-1+\triangle x)\,(-2\triangle x+\triangle^2 x)>0;$

$f(-1)$ yra taip pat minimas. Be to, $f(-1)=0$ kaip ir $f(1)$. Tad $f(x)=(x^2-1)^2$ turi tris ekstremus: du minimu ir vieną maksimą.

2. $f(x)=\sin x$; $f'(x)=\cos x$; $\cos x=0$; $x=\frac{\pi}{2}\pm n\pi$; lengva įsitikinti, kad kai $x=\frac{\pi}{2}$, tai $\sin x$ yra maksime, kai $x=\frac{3\pi}{2}$, tai — minime, kai $x=\frac{5\pi}{3}$, vėl maksime ir t.t.

3. $f(x)=e^x$; $f'(x)=e^x$; $e^x=0$. Kadangi nėra paprastos x reikšmės, kuri patenkintų paskutines lygtis, tai e-funkcija neturi ekstremų. Tiesa,

$$\lim_{x\to-\infty} ex=0,$$

bet riba nėra ekstremas.

Uždaviniai: 243. Padaryti visų trijų pavyzdžių geometriškus vaizdus ir įsitikinti, kad rastosios išvados yra teisingos.

244. Išnagrinėti funkciją $f(x)=(x^3-1)^2$.

245. Ar turi ekstremų $f(x)=\operatorname{tg}x$?

§ 48. ANTROJI FUNKCIJOS IŠVESTINĖ IR EKSTREMAI.

Jei kuri nors funkcija $f(x)$ yra tolydinė ir diferenciuojama, tai ir jos išvestinė yra taip pat tolydinė x-o funkcija, išskyrus tuos atvejus, kai ji yra pastovus dydis. Funkcijos išvestinė gali būti savo ruožtu diferenciuojama. Išvestinės išvestinė vadinama antrąja funkcijos išvestine, arba antruoju diferencialų santykiu. Antrąją funkcijos išvestinę žymime

$$y'',\ \text{arba}\ f''(x),\ \text{arba}\ \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Sakysime, kad turime funkciją

$$y=x^3-3x^2-x+3.$$

Jos pirmoji išvestinė yra

$$y'=3x^2-6x-1,$$

ir antroji —

$$y''=6x-6.$$

Antroji funkcijos išvestinė gali būti panaudota tiriant, ar surastasis funkcijos ekstremas yra maksimas ar minimas. Einant funkcijai per maksimą, jos išvestinė, eidama per nulį, keičia savo ženklą iš pliuso į minusą, vadinasi, mažėja. Bet mažėjančios funkcijos išvestinė yra neigiama. Atvirkščiai, kai funkcija eina per minimą, tai jos išvestinė iš neigiamos darosi teigiama, vadinasi, didėja, tad antroji išvestinė tuo atveju yra teigiama. Vadinasi, iš antrosios funkcijos išvestinės galime pažinti funkcijos ekstremą.

Praėjusio paragrafo pirmo pavyzdžio pirmoji išvestinė buvo

$$f'(x)=4x(x^2-1),$$

tad antroji

$$f''(x)=4(x^2-1)+4x\,.\,2x,$$
$$f''(x)=4(3x^2-1).$$

Buvo rasta, kad $f(x)$ turi ekstremus, kai $x=0,+1,-1$. Kadangi

$$f''(0)=-4<0,$$
$$f''(+1)=8>0$$

ir

$$f''(-1)=8>0,$$

tai pirmasis ekstremas yra maksimas ir antrieji du minimai.

Matome, kad su antrosios išvestinės pagalba ekstremus galima greičiau išaiškinti.

Dar pavyzdys:

$$f(x)=x^3-x-1;$$
$$f'(x)=3x^2-1;$$
$$f''(x)=6x.$$
$$3x^2-1=0;$$

$$x_1=+\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$f''\left(+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2\sqrt{3}>0;\quad f''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-2\sqrt{3}<0.$$

Tuo būdu radome, kad, kai $x = +\frac{\sqrt{3}}{3}$, funkcija turi minimą ir, kai $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, — maksimą. Patį minimo arba maksimo didumą galime rasti, įstatę į funkciją rastąsias argumento reikšmes:

$$f_{min}(x) = \frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} - 1;$$

$$f_{max}(x) = -\frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3} - 1.$$

Trupmeninių, irracionalinių ir daugelio sudėtinių funkcijų antroji išvestinė kartais būna gana sudėtinga. Bet turint galvoj, kad funkcijos ekstremui išaiškinti užtenka žinoti vietoj antros išvestinės vien jos ženklas, tai antras diferenciavimas dažnai gali būti sutrumpintas. Sakysime, kad pirmoji funkcijos išvestinė yra trupmeninė:

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Jei ši funkcija turi ekstremų, tai jos pirmoji išvestinė turi būti lygi nuliui:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

Iš čia

$$\varphi(x) = 0.$$

Išsprendę šias lygtis, sakysime, randame jų šaknį x_1, vadinasi,

$$\varphi(x_1) = 0.$$

Antroji funkcijos išvestinė

$$f''(x) = \frac{\varphi'(x).\psi(x) - \varphi(x).\psi'(x)}{\psi^2(x)},$$

kai $x = x_1$ ir $\varphi\ (x = x_1) = 0$, virsta

$$f''(x = x_1) = \frac{\varphi'(x)}{\psi(x)}.$$

Taigi, jei pirmoji išvestinė yra trupmeninė funkcija, tai antrosios išvestinės reikšmę, kuri atitinka funkcijos ekstremą, gauna-

me padalę skaitiklio funkcijos išvestinę iš vardiklio funkcijos ir vietoj x įstatę ekstremo argumento reikšmę.

Pavyzdžiai:

1. $f(x) = x + \sqrt{3-2x}$; $\quad f'(x) = 1 + \frac{-2}{2\sqrt{3-2x}} =$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{3-2x}} = \frac{\sqrt{3-2x} - 1}{\sqrt{3-2x}};$$

$$\sqrt{3-2x} = 1; \quad 3 - 2x = 1; \ x_1 = 1,$$

$$f''(x=1) = \frac{(\sqrt{3-2x} - 1)'}{\sqrt{3-2x}} = -\frac{1}{3-2x}; \quad f''(1) = -1 < 0.$$

Ši funkcija teturi vieną ekstremą, maksimą, būtent, $f_{max}\ (1) = 2$:

2. $f(x) = \frac{x-4}{x^2-7}$; $\quad f'(x) = \frac{x^2 - 7 - 2x(x-4)}{(x^2-7)^2}$;

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 8x - 7}{(x^2-7)^2}; \quad x^2 - 8x + 7 = 0; \quad x_{1,2} = 4 \pm 3;$$

$$f''(x = x_{1,2}) = \frac{-2x + 8}{(x^2-7)^2}; \quad f''(x_1) = \frac{-6}{42^2} < 0;$$

$$f''(x_2) = \frac{6}{36} > 0.$$

$f(x_1) = \frac{3}{42} = \frac{1}{14}$ yra funkcijos maksimas,

$f(x_2) = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$ yra jos minimas.

Gali pasitaikyti, kad antroji funkcijos išverstinė lygi nuliui. Ar tuo atveju turi funkcija ekstremą, reikia spręsti praėjusio paragrafo metodu. Tačiau dažniausiai $f''(x) = 0$ reiškia, kad funkcija turi vingį.

Pavyzdžiai:

1. $f(x) = x^3 - 2$;
$f'(x) = 3x^2$;
$f''(x) = 6x$.
$3x^2 = 0$; $\quad x_1 = 0$; $\quad f''(0) = 0$.

Kadangi
$f'(-\triangle x) = 3(-\triangle x)^2 > 0$ ir $f'(\triangle x) = 3(\triangle x)^2 > 0$,
vadinasi, išvestinė prieš ir po tariamojo ekstremo yra teigiama,

tai funkcija neturi nei maksimo, nei minimo. Kadangi taške, kurio $x_1 = 0$, išvestinė lygi nuliui, tai funkcijos kreivė šioje vietoje daro vingį. Įsitikiname, grafiškai pasivaizdavę funkciją.

2. $f(x) = x^4$;
$f'(x) = 4x^3$;
$f''(x) = 12x^2$.
$4x^3 = 0$; $x_1 = 0$; $f''(0) = 0$.

Kadangi $f'(-\triangle x) = -4\triangle^3 x < 0$
ir $f'(\triangle x) = 4\triangle^3 x > 0$,
tai $f(x) = x^4$ turi vieną minimą.

Uždaviniai: 246. Surasti ekstremus ir vingius funkcijų:

1. $f(x) = (x^2 - 1)^3$.
2. $f(x) = x^5 - 30x^3 - 5x - 10$.
3. $f(x) = \frac{a}{x^2} + b$.
4. $f(x) = 3x^2 + \frac{2}{x}$.
5. $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 9}{x - 5}$.
6. $f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{4}{x-6}$.
7. $f(x) = x\sqrt{x^2 - 4}$.
8. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x - 3}}$.
9. $f(x) = 2x + \sqrt{5 - x^2}$.
10. $f(x) = x + \sqrt{31 + 2x - x^2}$.

247. Ištirti kreivės (rasti ekstremai, vingiai, pasidaryti brėžiniai):

1. Apskritimas $x^2 + y^2 = a^2$;
2. Elipsė $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
3. Hiperbolė $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;
4. Parabolė $y^2 = 2px$;
5. Neilio parabolė $x^3 - ay^2 = 0$;
6. Lemniskatė $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$.

§ 49. FUNKCIJŲ SUDARYMAS IR JŲ TYRIMAS.

Tyrėme duotas funkcijas. Dabar panagrinėsime keletą uždavinių, kuriuose funkcija matematiškai nėra duota. Čia teks pirma funkcija susidaryti, o jau paskui ir ištirti.

1. Kokio pavidalo turi būti stačiakampis žemės sklypas bet kurio didumo, kad jam aptverti mažiausia tereiktų medžiagos?

Sakysim, kad sklypo plotas yra a^2, viena jo kraštinė x ir antra z. Tuomet

$$x \cdot z = a^2 \quad \text{ir} \quad z = \frac{a^2}{x}.$$

Tvorai reikalingos medžiagos kiekis pareina nuo sklypo perimetro, kurio ilgis pareina nuo kraštinių ilgio. Vadinasi, perimetras yra x-o funkcija. Pusė perimetro yra

$$f(x) = x + \frac{a^2}{x}.$$

Iš čia turime $$f'(x) = 1 - \frac{a^2}{x^2}.$$

$$x^2 - a^2 = 0; \quad x_1 = a \quad \text{ir} \quad x_2 = -a,$$

Kraštinės ilgis tebūnie tik teigiamas, tada pirmoji funkcijos išvestinė lygi nuliui, kai $x = a$.

Toliau $$f''(x) = \frac{2a^2}{x^3}; \quad f''(a) = \frac{2}{a} > 0.$$

Taigi, kai $x_1 = a$, funkcija turi minimą. Bet kai $x = a$ ir $z = a$, tad sklypas turi būti kvadratiškas, norint kad jo perimetras būtų trumpiausias.

2. Kuris lygiašonis trikampis, turįs šoninę kraštinę b, turi didžiausią plotą?

Pažymėję kampą tarp lygiųjų trikampio kraštinių x, gauname trikampio plotą

$$f(x) = \frac{b^2 \sin x}{2}.$$

Iš čia $$f'(x) = \frac{b^2 \cos x}{2}$$

$$\frac{b^2 \cos x}{2} = 0; \quad \cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ (arba } 90^0\text{)}.$$

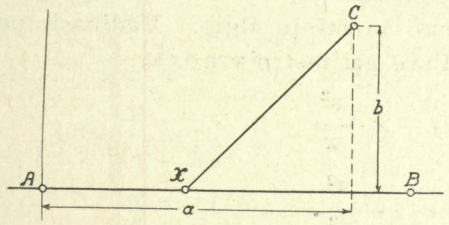
Toliau

$$f''(x) = -\frac{b^2 \sin x}{2}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{b^2}{2} < 0$$

Tad $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{b^2}{2}$ yra didžiausias plotas. Vadinasi, iš visų lygiašonių trikampių status turi didžiausią plotą.

3. Iš taško A (žiūr. 38 br.) reikia nuvykti į tašką $C(a;\ b)$. Tiese AB eina geležinkelis, kuriuo galima važiuoti greičiu v_1. Kurioj vietoj reiktų išlipti iš traukinio, kad trumpiausiu laiku galima būtų pasiekti C, einant v_2 greičiu?



38 brėž.

Kaip matyti iš brėžinio, reikia rasti vieta X, kad kelias $AX + XC$ būtų nukeliautas per trumpiausią laiką. Tebūnie $AX = x$, tada $XC = \sqrt{(a-x)^2 + b^2}$ ir kelionės laikas $f(x)$ yra:

$$f(x) = \frac{x}{v_1} + \frac{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}{v_2}$$

Diferenciuosime gautąją funkciją ir rasime jos minimą.

$$f'(x) = \frac{1}{v_1} + \frac{2(a-x)(-1)}{2v_2\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}$$

$$f'(x) = \frac{v_2\sqrt{(a-x)^2 + b^2} - v_1(a-x)}{v_1 v_2 \sqrt{(a-x)^2 + b^2}};$$

$$v_2\sqrt{(a-x)^2 + b^2} = v_1(a-x)$$

$$v_2^2(a-x)^2 + b^2v^2 = v_1^2(a-x)^2;$$

$$(a-x)^2(v_1^2 - v_2^2) = b^2v_2^2;$$

$$a - x = \frac{bv^2}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}$$

$$x_1 = a - \frac{bv_2}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}.$$

Dar kartą sutrumpintai diferenciavę funkciją, gauname

$$f''(x = x_1) = \frac{-v_2(a-x) + v_1\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}{v_1v_2[(a-x)^2 + b^2]} > 0,$$

nes skaitiklio antrasis dėmuo yra didesnis už pirmąjį

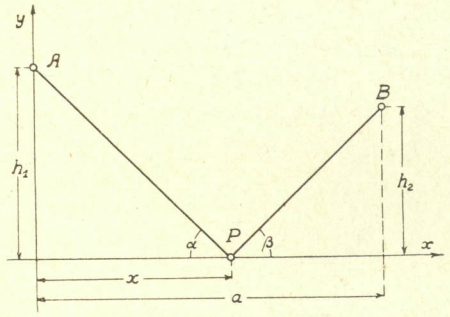
$$[v_1 > v_2 \text{ ir } \sqrt{(a-x)^2 + b^2} > (a-x)].$$

Tad, kai $x_1 = a - \frac{bv_2}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}$, kelionės laikas bus trumpiausias.

4. Reikia rasti tiesėje taškas, kurio nuotolių nuo dviejų duotųjų taškų suma būtų mažiausia.

Tebūnie duotoji tiesė x-ų ašis ir duotieji taškai A ir B (39 brėž.). Ieškomas taškas P, kurio nuotolių suma

$$AP + PB$$



39 brėž.

būtų trumpiausia.

Taškų A ir B koordinatas pažymėsime: $A(0;h_1)$ ir $B(a;\ h_2)$. Pažymėję ieškomojo taško P abscisą x-u, gauname

$$f(x) = \sqrt{x^2 + h_1^2} + \sqrt{(a-x)^2 + h_2^2}.$$

Diferenciavę gauname

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} + \frac{x-a}{\sqrt{(-x)^2 + h_2^2}}.$$

Paėmę išvestinę, lygią nuliui, gauname

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + h_2^2}},$$

arba

$$\cos\alpha = \cos\beta.$$

Antroji funkcijos išvestinė yra šiuo atveju teigiama. (Prašom patys įsitikinti!). Tad, kai $\cos\alpha = \cos\beta$, arba $\alpha = \beta$, kelias $AP + PB$ yra trumpiausias.

Šis sprendinys fiziškai yra artimai susijęs su optikos dėsniu: spindulys reflektuojamas nuo veidrodžio taip, kad „kritimo“ kampas būtų lygus „atspindžio“ kampui. Vadinasi, spindulys pasirenka tokį kelią, kad jam nueiti reiktų mažiausia laiko, nes, vienodu greičiu eidamas, jis trumpiausią kelią nueina per trumpiausią laiką.

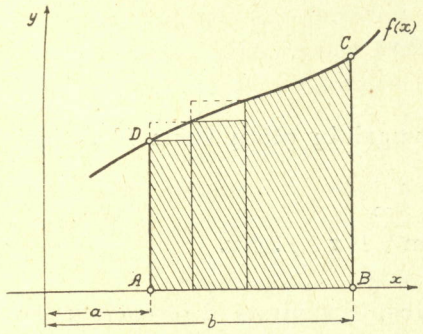
V SKYRIUS

Integralinis skaičiavimas.

§ 50. APIBRĖŽTINIS INTEGRALAS.

Turime kurią nors funkciją $y = f(x)$. Tebūnie ji intervale $a \leqq x \leqq b$ tolydinė. Atvaizdavę tą funkciją koordinatų sistemoje ir, be to, išbrėžę ordinatas $f(a)$ ir $f(b)$, gauname figūrą $ABCD$ (40 brėž.). Tos figūros plotas yra vadinamas funkcijos $f(x)$ apibrėžtiniu integralu ribose nuo a ligi b. Tad apibrėžtinis duotosios funkcijos integralas yra plotas, aprėžtas grafinio jos vaizdo, dviejų ordinatų ir abscisų ašies. Pažymėsime tą plotą F_a^b.

Dabar pasistengsime apskaičiuoti to ploto didumą. Kadangi $f(x)$, paprastai, yra kreivė, tai stačiai jos ploto išskaičiuoti (ar išmatuoti) nemokame. Dėl to abscisų ašies atkarpą AB (ji lygi $b - a$) padalysime į n dalių. Iš kiekvieno dalybos taško pakelsime funkcijos ordinatą. Tuo būdu ieškomasis plotas bus padalytas į n dalių. Toliau kiekvienoje šio ploto dalyje išbrėšime su x ašimi lygiagretes atkarpas, einančias per viršutinį to stačiakampio ploto ruožo trumpiausios ir ilgiausios ordinatos galą. Tuo būdu ties kiekvienu ploto ruožu gausime po du siaurus stačiakampainius: vieno iš jų plotas bus mažesnis už ruožo plotą, antro — didesnis. Pažymėsime visų mažųjų stačiakampainių plotų sumą f_n, ir didžiųjų F_n. Aišku, kad



40 brėž.

$$f_n < F_a^b < F_n.$$

Iš brėžinio matyti, kad juo didesnis bus skaičius n, į kurį dalome atkarpą $b - a$, juo mažiau besiskirs didesniųjų stačiakam-

painių plotas nuo mažesniųjų ir šių dviejų nuo atitinkamo ruožo ploto. Dalikliui n einant į begalybę, skirtumas $F_n - f_n$ arba $F_a^b - f_n$ ir $F_n - F_a$ eis į nulį. Tad galime parašyti, kad

$$\lim_{n \to \infty} f_n = F_a^b \quad \text{ir} \quad \lim_{n \to \infty} F_n = F_a^b. \qquad (1)$$

Apibrėžtinis funkcijos $f(x)$ integralas yra, tuo būdu, tam tikra riba. Norėdami analitiškai (tam tikru reiškiniu) išreikšti tą ribą, mes galvosime taip: pažymėsime n-inę atkarpos $b - a$ dalį $\triangle x$; kiekvienoje tos atkarpos dalyje pakelsime bet kurią ordinatą $f(x_1)$, $f(x_2)$ ir t. t. Išvedę per ordinatų galus lygiagretes su x ašimi, mes vėl gausime n stačiakampainių, kurių kiekvieno plotas lygus $\triangle x$, padaugintam iš atitinkamos ordinatos. Visų tų stačiakampainių plotų suma yra

$$F = \triangle x . f(x_1) + \triangle x . f(x_2) + \ldots + \triangle x . f(x_n),$$

arba

$$F = [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] . \triangle x.$$

Parašę laužtiniuose skliaustuose esamą sumą su Σ simboliu gauname

$$F = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) \triangle x;$$

einant n į begalybę, stačiakampainių plotų suma F artinsis į integralą F_a^b. Tad

$$F_a^b = \lim_{n \to \infty} F_n = \lim \sum_{\nu=1}^{\infty} f(x_\nu) . \triangle x.$$

Kadangi, kai n eina į begalybę, $\triangle x$ virsta diferencialu dx ir $f(x_\nu)$ gauna visas funkcijos $f(x)$ reikšmes nuo $f(a)$ ligi $f(b)$, tai integralą galime dar taip parašyti·

$$F_a^b = \lim \Sigma_a^b f(x)dx,$$

arba, pagal Leibnic'ą,

$$F_a^b = \int_a^b f(x)dx. \qquad (2)$$

Riestas ženklas yra vadinamas integralo ženklu ir yra kilęs iš žodžio „suma" pirmos raidės „s". Tačiau reikia įspėti, kad būtų neaišku ir net klaidinga sakyti, kad apibrėžtinis integralas yra suma „be galo didelio skaičiaus be galo mažų dėmenų", kurių kiekvienas reiškia „be galo siauro stačiakampainio plotą". Atsisakydami nuo grynai analitiško įrodymo, kad kiekviena tolydinė funkcija turi apibrėžtinį integralą, mes jo supratimą semiame iš geometrinio funkcijos vaizdo ir jo sudaromo su x ašimi ir dviem ordinatom ploto.

§ 51. PAGRINDINĖS APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS.

Apibrėžtinio integralo

$$\int_a^b f(x)dx$$

funkcija $f(x)$ vadinasi integruojamoji funkcija, a ir b yra integralo ribos. Patį integralą trumpai taip skaitysime: „integralas nuo a ligi b f x-o dx".

Praėjusiame paragrafe funkcija nuo a ligi b ėjo viršum abscisų ašies. Kita kuri funkcija, visa arba jos dalis, galėtų eiti žemiau ašies. Neigiamos funkcijos dalies ordinatos yra neigiamos, todėl ir jos sudaromas plotas būtų neigiamas. Taigi plotą viršum abscisų ašies laikysime teigiamu, apačioje — neigiamu. Be to, mes ėmėme $a < b$; jei būtų buvę atvirkščiai, tai nuo a į b būtų tekę eiti į kairę pusę ir $\triangle x$ būtų tekę laikyti neigiamu. Tuo atveju tas pats plotas būtų neigiamas. Vadinasi,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Be to, savaime aišku, kad

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Paėmus tarp ribų a ir b dar kokią ribą c, savaime matyti, jog gautume

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (4)$$

Tuo pasinaudodami, galime rasti absoliutinį apibrėžtinį integralą tokios funkcijos, kurios viena dalis teigiama, o antra —

neigiama. surandame kiekvienos dalies integralą skyrium ir sudedam jų absoliutines reikšmes.

Iš to, kaip mes sudarėme integralo reiškinį, lengva pamatyti, kad jei $y = cf(x)$, tai

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx. \qquad (5)$$

Arba žodžiais tariant: pastovus funkcijos daugiklis galima iškelti už integralo ženklo. Jei duotoji funkcija

$$f(x) = \varphi(x) \mp \psi(x),$$

tai

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b [\varphi(x) \mp \psi(x)]dx = \int_a^b \varphi(x)dx \mp \int_a^b \psi(x)dx, \qquad (6)$$

tariant, sumos integralas yra lygus integralų sumai. Tos taisyklės teisingumu lengvai įsitikinsime, parašę integralus ribų pavidalu*).

§ 52. NEAPIBRĖŽTINIS INTEGRALAS IR JO IŠVESTINĖ.

Apibrėžtinis integralas

$$\int_a^b f(x)dx$$

yra pastovus dydis, nes jis yra tam tikros, iš visų pusių aprėžtos, figūros plotas. Paėmę jo vieną kurią, pav., viršutinę ribą kintamą, gausime integralą, kurio dydis pareis nuo tos kintamos ribos reikšmės: vietoj apibrėžtinio integralo turėsime kintamą integralą, kintamosios ribos funkciją. Ją pažymėsime $F(x)$. Tad

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx. \qquad (7)$$

*) (5) ir (6), vadinasi, taip įrodome:

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} cf(x_\nu)\Delta x = c \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\Delta x = c\int_a^b f(x)dx.$$

$$\int_a^b [\varphi(x) \mp \psi(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} [\varphi(x_\nu) \mp \psi(x_\nu)]\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \varphi(x_\nu)\Delta x \mp$$

$$\pm \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \psi(x_\nu)\,\Delta x = \int_a^b \varphi(x)dx \mp \int_a^b \psi(x)dx.$$

Šitą kintamą integralą vadiname neapibrėžtiniu integralu.

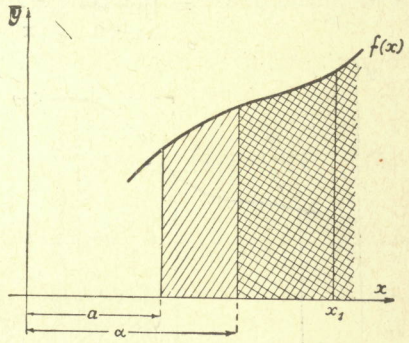
Ta pati funkcija $f(x)$ turi be galo daug neapibrėžtinių integralų, kurie vienas nuo kito tesiskiria apibrėžtiniu integralu, kitaip sakant, pastoviu dydžiu. Brėžinyje yra pavaizduoti $f(x)$ du neapibrėžtiniai integralai

$$\int_a^x f(x)dx \text{ ir } \int_\alpha^x f(x)dx,$$

kurių vieno pastovi riba yra a, antrojo — α. Iš paties brėžinio matyti, kad

$$\int_a^x f(x)dx - \int_\alpha^x f(x)dx =$$

$$= \int_a^\alpha f(x)dx = c.$$



41 brėž.

Už tat, turėdami vieną $f(x)$ neapibrėžtinį integralą, kitus galime gauti prie jo pridėdami atitinkamą pastovų dydį. Turėdami integralą $F(x)$, antrą tos pačios funkcijos integralą $G(x)$ gauname, pridėję pastovų dydį c prie $F(x)$:

$$G(x) = F(x) + c.$$

Turint galvoj, kad tos pačios funkcijos $f(x)$ neapibrėžtiniai integralai vienas nuo kito tesiskiria pastoviu dydžiu, kurį apibūdina apatinė integralo riba, yra susitarta, prie integralo ženklo visiškai nebedėti tos apatinės ribos. Neberašoma taip pat nė kintamoji viršutinė riba. Taigi bet kurį neapibrėžtinį integralą

$$\int_a^x f(x)dx + c,$$

toliau rašysime taip

$$\int f(x)dx.$$

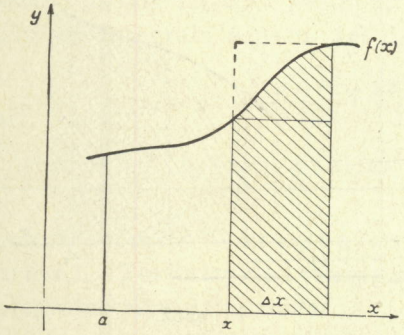
Neapibrėžtinio integralo funkcija yra diferenciuojama. Neapibrėžtinio integralo

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

išvestinė (42 brėž.) yra

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx}{\Delta x}.$$



42 brėž.

Iš brėžinio matyti, kad

$$\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx$$

yra lygus plotui figūros, kuri aprėžta abscisų ašies, funkcijos $f(x)$ kreivės dalies ir ordinatų, kurios atitinka x *ir* $x+\Delta x$ reikšmes. Pažymėję aukščiausią tos figūros ordinatą $f(x_1)$ ir žemiausią $f(x_0)$, galime parašyti

$$f(x_0)\Delta x < \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx < f(x_1)\Delta x$$

arba

$$f(x_0) < \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx}{\Delta x} < f(x_1)$$

Kai Δx eina į nulį, skirtumas tarp $f(x_0)$ ir $f(x_1)$ darosi be galo mažas; ir, be to, $f(x_0)$ ir $f(x_1)$ eina į $f(x)$ ir mes gauname

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x). \qquad (8)$$

Taip pat kiekvieno kito tos pačios funkcijos $f(x)$ neapibrėžtinio integralo išvestinė yra lygi $f(x)$, nes

$$[G(x)]' = [F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$$

arba

$$[\int f(x)dx]' = f(x).$$

Šituo būdu esame gavę labai svarbų sąryšį tarp funkcijos ir jos neapibrėžtinio integralo: bet kuris funkcijos $f(x)$ neapibrėžtinis integralas $F(x)+c$ turi išvestinę $F'(x)$, kuri yra lygi pačiai funkcijai $f(x)$. Faktas, kad tolydinės funkcijos neapibrėžtinio integralo diferenciacija vėl duoda tą pačią funkciją, sudaro diferencialinio ir integralinio skaičiavimų branduolį.

Uždaviniai:

248. Parašyti neapibrėžtiniai integralai funkcijų:

a) $f(x) = 2x$ d) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) „ $= 6x$ e) „ $= \sin x$

e) „ $= 4x^3$ f) „ $= \cos x$.

249. Rasti integruojamoji $f(x)$, žinant, kad:

a) $\int f(x)dx = x$ d) $\int f(x)dx = e^x$

b) $\int f(x)dx = 3x^2$ e) $\int f(x)dx = \operatorname{tg} x$

c) $\int f(x)dx = x^3$ f) $\int f(x)dx = \frac{1}{x}$

250. Įsitikinti, kad $f(x)$ yra tas pats šiuose integraluose:

a) $\int f(x)\,dx = x^7 + 3$, b) $\int f(x)dx = x^7 + \frac{1}{2}$,

c) $\int f(x) = x^7 + \pi$.

§ 53. PRIMITYVINĖ FUNKCIJA IR JOS SĄRYŠIS SU APIBRĖŽTINIU INTEGRALU.

Iš praėjusio paragrafo įrodymų matyti, kad neapibrėžtinis integralas išsprendžia šį klausimą: turime funkciją $f(x)$, reikia rasti tokia nauja funkcija $F(x)$, kurios išvestinė būtų lygi duotajai $f(x)$. Vadinasi, reikia, kad

$$F'(x) = f(x).$$

Funkcija $F(x)$ yra vienas iš neapibrėžtinių $f(x)$ integralų, nes jo išvestinė ir yra kaip tik $f(x)$. Belieka susidaryti taisyklės, kurios prieinamiausiu būdu leistų mums kiekvienai turimai funkcijai susirasti jos neapibrėžtinį integralą.

Išvestinės, arba diferencialų santykio, ieškojimo procesą vadinome diferenciavimu, diferencialiniu skaičiavimu. Dabar turime atvirkščią uždavinį: turėdami išvestinę, ieškome pačios funkcijos (neapibrėžtinio integralo). Šis procesas vadinamas integravimu, integraliniu skaičiavimu. Duotąją funkciją $f(x)$ vadinsime integruojamąja, o ieškomąją — dar ir primityvine, arba pirmykšte, funkcija. Funkcijos

$$f(x) = x$$

primityvinė funkcija yra

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + c$$

(c — pastovus dydis), nes

$$F'(x) = x.$$

Integravimą rašome taip:

$$F(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

2. Funkcijos x^2 primityvinė funkcija (arba neapibrėžtinis integralas) yra $\frac{x^3}{3} + c$, nes ją diferenciavę gauname x^2.

Taigi $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c.$

3. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c.$ $\int e^x dx = e^x + c,$

$\int \cos x\, dx = \sin x + c.$ $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c.$

Dabar rasime neapibrėžtinio integralo sąryšį su apibrėžtiniu integralu. Tebūnie funkcijos $f(x)$ vienas neapibrėžtinis integralas $F(x)$. Kiti neapibrėžtiniai integralai, arba primityvinės funkcijos, $G(x)$ gali skirtis nuo šito tik pastoviu dydžiu c:

$$G(x) = F(x) + c.$$

Pasinaudodami neapibrėžtiniu integralu

$$G(x) = \int_a^x f(x)dx$$

norime rasti apibrėžtinį integralą

$$G_a^b = \int_a^b f(x)dx.$$

Neapibrėtinio integralo $G(x)$ reikšmė yra lygi 0, kai $x = a$, nes

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Vadinasi, turime,

$$G(a) = 0 \qquad F(a) + c = 0,$$
$$F(a) = -c \qquad G(x) = F(x) - F(a).$$

Iš paskutinių lygčių, kai $x = b$, gaunamas, pagaliau, apibrėžtinis integralas

$$G_a^b = G(b).$$

Vadinasi,

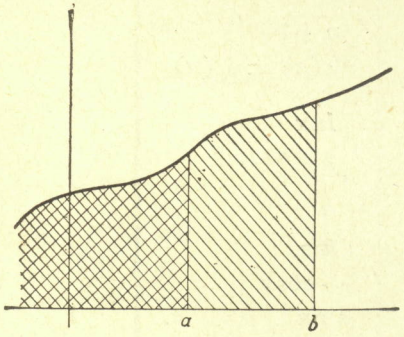
$$\underline{G_a^b = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).} \qquad (9)$$

Matome, kad, norėdami rasti apibrėžtinį integralą

$$\int_a^b f(x)dx,$$

turime rasti $f(x)$ vieną kurią primityvinę funkciją $F(x)$ ir imti jos dviejų reikšmių skirtumą

$$F(b) - F(a).$$



43 brėž.

Skirtumas $F(b) - F(a)$ yra įprasta simboliškai rašyti:

$$F(x)\Big|_a^b.$$

Taigi, turime eilę lygių reiškinių:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Pavyzdžiai: 1. Rasime apibrėžtinį integralą:

$$Q = \int_1^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{124}{3} = 41\frac{1}{3}.$$

2.

$$P = \int_0^\pi \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Uždaviniai:

251. Rasti apibrėžtiniai integralai:

1. $\int_0^4 (x^2 + 3x - 4)dx$
2. $\int_1^4 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$
3. $\int_{-1}^1 e^x dx$
4. $\int_0^\pi \cos x\, dx.$

§ 54. ELEMENTARINĖS INTEGRAVIMO FORMULĖS.

Kadangi integravimas yra priešingas veiksmas diferenciavimui, tai iš pagrindinių diferenciavimo formulių galime susidaryti atitinkamas integravimo formules. Surašysime jas į stulpelius tuo būdu, kad kairiniame stulpelyje turėsime išvestines funkcijas, o dešininiame — primityvines (arba neapibrėžtinius integralus).

	$F'(x) = f(x)$	$F(x) = \int f(x)dx$
1	$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
2	$\varphi(x) \pm \psi(x)$	$\Phi(x) \pm \Psi(x)$
3	$\frac{1}{x}$	$\ln x$
4	e^x	e^x
5	$a^x \ (a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}$
6	$\sin x$	$-\cos x$
7	$\cos x$	$\sin x$
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x$
9	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x$
10	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \arcsin x \\ -\arccos x \end{cases}$
11	$\frac{1}{1+x^2}$	$\begin{cases} \mathrm{arc\,tg}\, x \\ -\mathrm{arc\,ctg}\, x \end{cases}$

(10)

Kad dešininio stulpelio funkcijos gaunamos integruojant atitinkamas kairinio stulpelio funkcijas, lengva patikrint: tereikia jos diferenciuoti ir palyginti su atitinkamomis kairinio stulpelio funkcijomis.

Turime dar pastebėti, kad prie dešininio stulpelio funkcijų galima pridėti dar po pastovų dydį c.

Uždaviniai: 252. Integruoti:

1. $\int x^5 dx$ 2. $\int 5x^4 dx$ 3. $\int \frac{x^7}{3} dx$
4. $\int 3dx$ 5. $\int \pi dx$ 6. $\int x^{n+1} dx$
7. $\int \sqrt{x} dx$ 8. $\int \sqrt[5]{x} dx$ 9. $\int x^{-n} dx$
10. $\int at^2 dt$ 11. $\int \sin x dx$ 12. $\int \cos x dx$
13. $\int (x^2 + 1)dx$ 14. $\int (x + \frac{1}{x^2})dx$ 15. $\int (1 - \sin x)dx$
16. $\int (x^2 - 2\sin x)dx$ 17. $\int (1 - \frac{1}{\sin^2 x})dx$ 18. $\int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} dx$
19. $\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 20. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{2+2x^2}\right)dx$
21. $\int (e^x - \sin x)dx$ 22. $\int (a^x + b^x)dx.$

253. Rasti plotai:

1. $\int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)dx$ 2. $\int_0^\pi a\sin x\, dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx$ 4. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$
5. $\int_0^3 \sqrt[3]{x}\, dx$ 6. $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx$
7. $\int_0^1 (x-1)^n dx$ 8. $\int_1^5 (x^2 + 2 + \frac{1}{x^2})dx$
9. $\int_1^2 (x + \frac{1}{x})dx$ 10. $\int_0^1 (e^x + e^{-x})dx.$

§ 55. TRUPMENINIŲ FUNKCIJŲ INTEGRAVIMAS.

Integravimas tuo yra sunkesnis už diferenciavimą, kad nėra visuotinių ir paprastų formulių funkcijų sandaugai, dalmeniui ir sudėtinėms funkcijoms integruoti. Iš daugelio įvairių

integravimo metodų, kurie vartojami integraliniame skaičiavime mes išaiškinsime tik keletą paprastesniųjų. Pirmiausia imsime trupmenines funkcijas.

1. Apgręžę sudėtinės logaritminės funkcijos diferenciavimo formulę.

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

gauname

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln f(x) + c. \qquad (11)$$

Iš čia matyti: jei duotosios trupmeninės funkcijos skaitiklis yra vardiklio išvestinė, tai jos integralas yra lygus natūraliniam vardiklio logaritmui.

Pavyzdžiai:

$$\int \frac{3x^2}{x^3+5}\, dx = \ln(x^3+5) + c, \text{ nes } (x^3+5)' = 3x^2.$$

$$\int \frac{2}{x-7}\, dx = 2\int \frac{1}{x-7}\, dx = 2\ln(x-7) + c.$$

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = -\ln \cos x + c.$$

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \ln \sin x + c.$$

2. Kai duotosios trupmeninės funkcijos vardiklis yra vienanaris arba pirmojo laipsnio dvinaris, tai tokia funkcija patogiausia integruoti funkcijos skaitiklį padalinus iš vardiklio.

Pav.,

$$\int \frac{x^4+3x^2-7x+2}{2x}\, dx = \int \left(\frac{x^3}{2} + \frac{3x}{2} - \frac{7}{2} + \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \frac{x^4}{8} + \frac{3x^2}{4} - \frac{7x}{2} + \ln x + c.$$

3. Kai trupmeninės funkcijos vardiklis, būdamas aukštesnio laipsnio, yra išskaidomas į pirmojo ir antrojo laipsnio daugiklius, tai trupmeninė funkcija gali būti integruota metodu, ku-

ris vadinamas funkcijos suskaldymo dalinėmis trupmenomis metodu. Jį pavaizduosime dviem pavyzdžiais.

a) Tebūnie

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$$

Matyti, kad ši funkcija gali būti pakeista suma dviejų trupmenų, iš kurių vienos vardiklis yra x, antros $x-1$. Pirmos trupmenos skaitiklį pažymėsime raide a, antrosios — b. Taigi

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1};$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}.$$

Ši paskutinė tapatybė yra galima tik tada, kai

$$a+b=0$$

ir

$$-a=1.$$

Iš čia gauname

$$a=-1$$

$$b=1.$$

Tuo būdu

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

ir

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{x(x-1)}\, dx = \int \frac{1}{x-1}\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \ln(x-1) - \ln x + c = \ln\frac{x-1}{x} + c.$$

b) Antras pavyzdys: reikia integruoti

$$\varphi(x) = \frac{2}{x(x^2+1)}$$

Skaldome duotąją trupmeninę funkciją dviem dalinėm trupmenom, kurių vienos vardiklis x ir antros x^2+1. Pirmos skaitiklį

galime vėl pažymėti a, o antros bx, nes skaitiklis turi būti vardiklio išvestinė (vardiklis yra kvadratinė funkcija, tad skaitiklis pirmojo laipsnio). Gauname

$$\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{x^2+1}$$

$$\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{(a+b)x^2+a}{x(x^2+1)}.$$

Iš čia turime

$$a+b=0;$$

$$a=2;$$

$$b=-2;$$

$$\int \frac{2}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx - \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= 2\ln x - \ln(x^2+1) + c = \ln \frac{x^2}{x^2+1} + c.$$

Integravimo teisingumą prašom patikrinti, gautąsias funkcijas diferenciuojant.

Uždaviniai: 254. Integruoti šios trupmeninės funkcijos:

1. $\int \frac{dx}{x+1}$ 2. $\int \frac{dx}{5-x}$ 3. $\int \frac{dx}{ax+b}$ 4. $\int \frac{x^2+1}{x^3}\,dx$

5. $\int \frac{x^7+3x^2+7}{x^2}\,dx$ 6. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

7. $\int \frac{a}{b+cx}\,dx$ 8. $\int \frac{e^x}{e^x+a}\,dx$ 9. $\int \frac{2dx}{x^2-1}$

10. $\int \frac{(4+x)dx}{2x-x^2}$ 11. $\int \frac{dx}{3x-2x^2}$ 12. $\int \frac{(a-b)\,dx}{(x-a)\,(x-b)}$

13. $\int \frac{ax+b}{(x+a)\,(x+b)}\,dx$ 14. $\int \frac{dx}{1+x-x^2}$ 15. $\int \frac{dx}{x^2+2x+1}$

16. $\int \frac{x+13}{x^2-4x-5}\,dx$ 17. $\int \frac{2x+6}{2x^2+3x+1}\,dx$

§ 56. INTEGRAVIMAS PAKEIČIANT ARGUMENTĄ.

Sudėtines funkcijas galime dažnai integruoti, pakeisdami kintamąjį. Paaiškinsime šią priemonę keliais pavyzdžiais:

1. Norėdami rasti integralą $\int \sin 2x\,dx$; imsime $2x=z$; tuo atveju $dx=\frac{dz}{2}$. Tad gauname

$$\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin z\,dz = -\frac{1}{2}\cos z + c.$$

Į gautąjį reiškinį sugrąžiname vietoj z vėl $2x$

$$\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c.$$

2. $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} = \int \frac{adz}{a^2(1+z^2)} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} z =$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} \qquad \left[\frac{x}{a}=z;\quad dx=adz\right].$$

3.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sqrt{u-1}\,du}{\sqrt{u}\,2\sqrt{u-1}} = \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} = \sqrt{1+x^2}$$

$$\left[\text{pakeitimų eilė: } 1+x^2=u;\ x=\sqrt{u-1};\ dx=\frac{du}{2x}=\frac{du}{2\sqrt{u-1}}\right]$$

4.

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right);$$

panašiai:

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right).$$

Uždaviniai: 255. Integruoti:

1. $\int \sin(a+x)dx$ 2. $\int \sin\frac{x}{2}\,dx$ 3. $\int \sin x\cos x\,dx$

4. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ 5. $\int e^{3x}dx$ 6. $\int_0^1 \sqrt{a^x+b}\,dx$

7. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$ 8. $\int \frac{dx}{x\ln x}$ 9. $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx.$

§ 57. DALINĖ INTEGRACIJA.

Integravę abi pusės dviejų funkcijų sandaugos diferenciavimo formulės

$$[f(x)\varphi(x)]' = f'(x)\,\varphi(x) + f(x)\,\varphi'(x),$$

gauname

$$f(x)\varphi(x) = \int f'(x)\,\varphi(x)dx + \int f(x)\,\varphi'(x)dx.$$

Iš šios lygybės vieną kurį integralą, sakysim, pirmąjį, galim išreikšti iš antrojo:

$$\int f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x) - \int f(x)\,\varphi'(x)dx. \qquad (12)$$

Jei šią antrąją sandaugą galime integruoti kuriuo nors kitu būdu, tai tuo pačiu gaunamas ir pirmosios funkcijų sandaugos integralas. Kadangi šituo būdu rezultatas gaunamas ne iš karto, tai šis metodas vadinamas dalinės integracijos metodu. Jį pavaizduosime keliais pavyzdžiais.

1. Norėdami integruoti

$$\int x\,e^x dx,$$

sakysim, kad $f'(x) = e^x$ ir $\varphi(x) = x$, tada $f(x) = e^x$ *) ir $\varphi'(x) = 1$. Tuo būdu gausime

$$\int x\,e^x dx = x\,e^x - \int e^x dx = x\,e^x - e^x + c = e^x(x-1) + c.$$

2. $\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + c$ | $f'(x) = \sin x;\quad \varphi(x) = x;$ $f(x) = -\cos x;\quad \varphi'(x) = 1.$

3. $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c.$ | $f'(x) = 1;\quad \varphi(x) = \ln x;$ $f(x) = x;\quad \varphi'(x) = \frac{1}{x}.$

Uždaviniai: 256. Integruoti:

1. $\int x\cos x\,dx$ 2. $\int \arcsin x\,dx$ 3. $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$
4. $\int x\,e^{nx}dx$ 5. $\int x^2\ln x\,dx$ 6. $\int x^2e^x dx$

*) Šioje vietoje pastovų dėmenį praleidžiame, jį parašydami galutiniame rezultate.

7. $\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x\cos x\,dx = \cos x\sin x + \int \sin^2 x\,dx =$
$= \sin x\cos x + \int (1-\cos^2 x)dx = \sin x\cos x + x - \int \cos^2 x\,dx;$
$2\int \cos^2 x\,dx = \sin x\cos x + x;\quad \int \cos^2 x\,dx =$
$= \frac{\sin x\cos x + x}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2} + x\right).$

8. $\int \sin^2 x\,dx$ 9. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ 10. $\int x^3\ln x\,dx$
11. $\int x^2\cos x\,dx$ 12. $\int e^x\sin x\,dx$ 13. $\int e^x\cos x\,dx$
14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\,dx.$

§ 58. PAPRASTESNIŲ IRRACIONALINIŲ FUNKCIJŲ INTEGRAVIMAS.

Nėra vienos bendros taisyklės irracionalinėms funkcijoms integruoti. Dėl to pasitenkinsime iš jų integravę tik kai kurias paprastesnes funkcijas.

Jei irracionalinės funkcijos pošaknio reiškinys yra pirmojo laipsnio, tai bet kurio laipsnio irracionalinė funkcija integruojama argumento pakeitimo metodu. Pavyzdžiui,

$$\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\int \sqrt[n]{z}\,dx = \qquad \Big|\ ax+b = z;\quad dx = \frac{dz}{a}$$

$$= \frac{1}{a}\int z^{\frac{1}{n}}dz = \frac{z^{1+\frac{1}{n}}}{a\cdot\frac{n+1}{n}} + c = \frac{n}{a(n+1)}(ax+b)\sqrt[n]{ax+b} + c.$$

Norėdami integruoti

$$\int \sqrt{1-x^2}dx,$$

galime pakeisti arba $x = \cos z$ arba $x = \sin z$ ir gauti

$$-\int \sin^2 z dz = \frac{1}{2}(\sin z\cos z - z) + c = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} - \arccos x)$$

arba

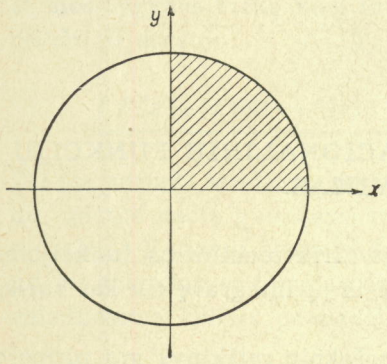
$$\int \cos^2 z dz = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c.$$

Kadangi $\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right)\right]'=\sqrt{1+x^2},$

tai atvirkščiai:

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right].$$

Pasinaudodami išnagrinėtų irracionalinių funkcijų integravimo rezultatais, galime surasti antrojo laipsnio kreivių plotus.



44 brėž.

Rasime, pavyzdžiui, skritulio plotą. Iš 44 brėžinio matyti, kad skritulio plotas

$$P=4\int_0^r f(x)dx,$$

kur

$$f(x)=\sqrt{r^2-x^2}=r\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}.$$

Pakeitę $\frac{x}{r}=\cos z$ arba $\sin z$, gauname

$$\int\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}dx=-\frac{r}{2}\left(\frac{x}{r}\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}-\arccos\frac{x}{r}\right)+c$$

ir, pagaliau,

$$\int_0^r=-\frac{r}{2}\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}-\arccos\frac{x}{r}\right)\Big|_0^r=\frac{\pi r}{4},\quad \underline{P=\pi r^2.}$$

Uždaviniai: 257. Rasti parabolės plotą nuo jos viršūnės ligi parametro.

258. Rasti elipsės plotas.

259. Rasti plotas tarp sinusoidės ir abscisų ašies.

260. Rasti plotas figūros, kurią sudaro kreivė

$$y=\frac{x^3}{6a^2}+\frac{a^2}{2x},$$

x-ų ašis ir ordinatos $x=a$ ir $x=b$.

261. Nuo apskritimo $x^2+y^2=r^2$ tiesė $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, kurios a ir b yra teigiami ir už r mažesni skaičiai, nupiovė segmentą. Rasti jo plotas.

§ 59. KREIVIŲ ILGIS.

Pasinaudodami integralinio skaičiavimo priemonėmis, galime išspręsti daugelį geometrijos klausimų. Praėjusiame paragrafe, integruodami funkcijas, skaičiavome plotus. Dabar imsimės suskaičiuoti kreivės ilgį.

Betarpiškai išmatuoti tegalime tiesias linijas, nes ilgio matai, metrai ir centimetrai, yra taip pat tiesūs. Algebrinės ir trigonometrinės priemonės teleidžia mums taip pat skaičiuoti tik tiesių linijų atkarpas, kai turime kitas atkarpas arba ir kampus. Kreivės lanką „ištiesti“ nemokame.

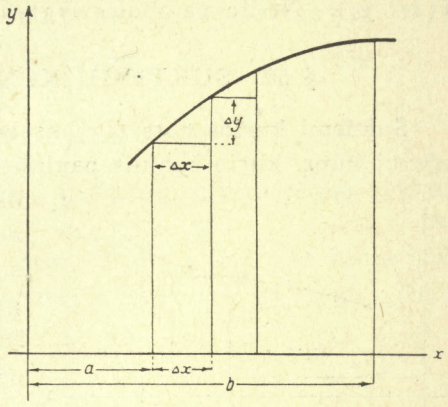
Geometrijoj, norėdami išskaičiuoti apskritimo ilgį, mes įrašydavom į jį arba aprašydavom apie jį taisyklingus daugiakampius ir skaičiavome jų perimetrus. Juo didesnis tokių daugiakampių kraštinių skaičius, juo mažiau jų perimetras tesiskiria nuo apskritimo ilgio. Tuo būdu į apskritimą, pasirodo, galima žiūrėti kaip į ribą perimetro tokio įrašyto arba aprašyto daugiakampio, kurio kraštinių skaičius neaprėžtai didelis.

Panašiai galime apskaičiuoti ir bet kurios $f(x)$ kreivės ilgį tarp dviejų duotųjų taškų.

Sakysim, turime $f(x)$, kuri yra tolydinė ir diferenciuojama, ir norime rasti jos ilgį nuo $x_1=a$ ligi $x_2=b$. Padalysime atkarpą $b-a$ į n lygių dalių. Iš dalybos taškų pakėlę ordinatas ir sujungę jų galus tiesėmis, gausime eilę stačių trikampių, kurių vienas statinis yra

$$\frac{b-a}{n}=\Delta x,$$

o antrasis $\Delta_1 y$, $\Delta_2 y$, ... $\Delta_n y$, ... Bet kurio stataus trikampio įžambinė



45 brėž.

$$d_\nu=\sqrt{\Delta^2 x+\Delta_\nu^2 y},$$

$$d_\nu=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta_\nu y}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x;$$

visų įžambinių suma $$S=\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta_\nu y}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x.$$

Skaičiui n neaprėžtai didėjant, skirtumas tarp įžambinių sumos ir lanko ilgio l neaprėžtai mažėja, be to, santykis $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ virsta $f'(x)$, nes $\triangle x \to 0$. Tuo būdu

$$l = \lim \sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\triangle_\nu y}{\triangle x}\right)^2} \cdot \triangle x,$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx. \qquad (13)$$

Rasime apskritimo ilgį C.

$$C = 4\int_0^r \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx; \qquad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2};$$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$C = 4\int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 4r \arcsin \frac{x}{r}\Big|_0^r = 2\pi r.$$

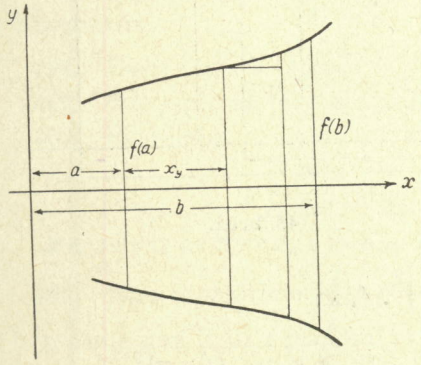
Uždaviniai: 262. Nusibrėžti funkcija $f(x) = \frac{m}{2}(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}})$ ir rasti pasirinktosios kreivės dalies ilgis.

263. Rasti parabolės $y = x^2$ ilgis nuo viršūnės ligi taško $A(x_1; y_1)$.

264. Rasti Neilio parabolės ilgis nuo viršūnės ligi taško $A(x_1; y_1)$. Neilio parabolės lygtys: $y^2 = ax^3$.

§ 60. SUKTINIŲ KŪNŲ PAVIRŠIUS.

Sukdami kurios nors $f(x)$ kreivės dalį apie x ašį, gauname suktinį kūną, kurio šoninis paviršius pareina nuo kreivės pavidalo (46 brėž.). Suktinio kūno juostos paviršius yra, tarsi, trapecija, kurios vieno pagrindo ilgis $2\pi f(x_\nu)$ ir antro $2\pi f(x_{\nu+1})$ ir kurios aukštinė — atitinkama lanko dalis



46 brėž.

$$\triangle s = \sqrt{1 + \left(\frac{\triangle_\nu y}{\triangle x}\right)^2} \cdot \triangle x.$$

Kad $\triangle x$ eina į nulį, gauname lanko diferencialą

$$ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$$

ir juostos paviršiaus diferencialą

$$dP = 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Iš čia suktinio kūno paviršius

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \qquad (14)$$

Uždaviniai: 265. Rasti kamuolio paviršius.

266. Rasti šoninis paviršius kūgio, kurio viršūnės kampas $2\alpha = 60^0$ ir kurio $h = 10$.

267. Rasti paraboloido paviršius nuo viršūnės ligi parametro.

§ 61. SUKTINIŲ KŪNŲ TŪRIS.

Suktinio kūno tūrio diferencialas yra

$$dV = \pi f^2(x) dx$$

(palygink tūrį ritinio, kurio pagrindo spindulys $r = f(x)$ ir aukštinė $h = dx$). Tad tūris

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \qquad (15)$$

Uždaviniai: 268. Rasti rutulio tūris.

269. Rasti tūris elipsoidų, gaunamų, sukant elipsę apie ašis $2a$ ir $2b$.

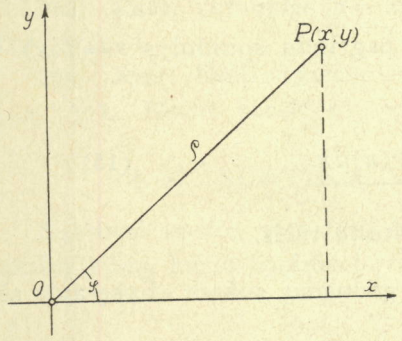
270. Apsikritimo nuopiova, kurio styga $2s$ ir kurio lanko spindulys r, sukasi apie skersmenį, lygiagretį su styga. Reikia rasti gautojo suktinio kūno tūris.

VI SKYRIUS

Kreivių lygtys poliarinėse koordinatose.

§ 62. POLIARINĖ KOORDINATŲ SISTEMA.

Stačiakampė koordinatų sistema nėra vienintelė priemonė taškui plokštumoje pažymėti. Kurio nors taško P (47 brėž.) vieta viena prasme gali būti taip pažymėta ir jo tiesiu nuotoliu ρ nuo koordinatų sistemos pradžios O ir kampu φ, kurį sudaro ρ su teigiamąja x ašimi. Skaičiai ρ ir φ vadinasi taško P poliarinėmis koordinatomis. Taškas O ir tiesė OX sudaro poliarinę koordinatų sistemą. Taškas O yra sistemos polius. Bet kurio plokštumos taško P nuotolis nuo poliaus O vadinamas dar radiju vektoru, o jo kampas φ amplitūda. Radijus vektoras laikomas visada teigiamu, o amplitūda — teigiama, jei gaunama, sukant radijų vektorą prieš laikrodžio rodyklę. Tašką su jo stačiakampėmis koordinatomis rašėme $P(x;\ y)$, o su poliarinėmis rašysime:



47 brėž.

$$P(\varphi;\ \rho).$$

Iš brėžinio matyti sąryšis tarp abiejų sistemų koordinatų, būtent:

$$x = \rho\cos\varphi \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \text{ arba } \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

$$y = \rho\sin\varphi \qquad \underline{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.} \qquad (1)$$

Uždaviniai: 271. Pažymėti koord. sistemoje taškai: $A_1\left(\frac{\pi}{2};1\right)$; $A_2\left(\frac{\pi}{3};3{,}5\right)$; $A_3(\pi\ ;\ 4)$; $A_4\left(\frac{3\pi}{2};\ 1{,}5\right)$.

272. Parašyti lygtys poliarinėje koord. sistemoje tiesių, kurios eina per polių ir kurių amplitūda $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; α.

§ 63. APSKRITIMO LYGTYS.

Pakeitę centrinių apskritimo lygčių

$$x^2 + y^2 = a^2$$

ortogonalines koordinatas poliarinėmis, gauname poliarines apskritimo lygtis:

$$\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi = a^2$$

$$\rho^2 = a^2$$

$$\underline{\rho = a.} \qquad (2)$$

Tos lygtys reiškia, kad radijus vektoras ρ nepareina nuo amplitūdos φ. Iš čia matome, kad poliarinėje sistemoje apskritimo lygtys yra analogiškos tiesės, lygiagretės su X arba Y ašimis, lygtims stačiakampėj sistemoj.

§ 64. CENTRINĖS ELIPSĖS IR HIPERBOLĖS LYGTYS.

Pakeitę koordinatas, iš lygčių

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gauname

$$\frac{\rho^2\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\rho^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1;$$

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}.$$

Paskutinėse lygtyse pakeičiame $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ ir $a^2 - b^2 = c^2$ ir gauname

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - c^2\cos^2\varphi}.$$

Pagaliau vietoj c, vadinamojo linijinio ekscentriciteto, imame $e = \frac{c}{a}$, numerinį ekscentricitetą, ir gauname

$$\underline{\rho^2 = \frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\varphi}.} \qquad (3)$$

Lygiai tuo pat keliu gauname hiperbolės lygtis poliarinėje sistemoje

$$\rho^2 = -\frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\varphi}. \qquad (4)$$

Iš lygčių matyti, kad elipsės radijus vektoras ρ yra ilgiausias ($\rho = a$), kai $\varphi = 0$. Kai $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tai $\rho = b$. Hiperbolės radijus vektoras yra trumpiausias kai $\varphi = 0$; jis tada lygus a. Didėjant φ, ρ didėja neaprėžtai ir, kai lygčių vardiklis lygus nuliui, $\rho = \infty$. Tuo atveju

$$\operatorname{tg} = \varphi \frac{b}{a},$$

vadinasi, ρ yra didžiausias, kai sutampa su asimptote. Kampui φ dar didėjant, ρ pasidaro menamas. Vėliau ρ sutampa su antrąja asimptote ir vėl eina trumpyn.

§ 65. ŽIDININĖS ELIPSĖS LYGTYS.

Sudarysime elipsės lygtis poliarinėj koordinatų sistemoj, kurios polių imsime kairiajam elipsės židiny ir kurios ašis sutaps su ilgąja elipsės ašimi.

§ 35 turėjome

$$a\sqrt{(c+x)^2 + y^2} = cx + a^2.$$

Padalę abi lygčių puses iš a ir pastebėję, kad

$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} = \rho,$$

gauname

$$\rho = ex + a.$$

Kadangi centrinės stačiakampės koordinatų sistemos

$$x = \rho\cos\varphi - c,$$

tai, pagaliau, turime

$$\rho = \frac{a - ce}{1 - e\cos\varphi}.$$

Šitose lygtyse skaitiklis gali būti pakeistas p, nes

$$a - ce = a - \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p.$$

Tad galutinio pavidalo židininės poliarinės elipsės lygtys yra šios:

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \qquad (5)$$

§ 66. ŽIDININĖS HIPERBOLĖS LYGTYS.

Tokiu pat keliu, kaip elipsės, gauname hiperbolės lygtis

$$a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} = cx - a^2$$

$$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} = ex - a.$$

Paėmę poliarinę koord. sistemą šiuo kartu dešiniajame židiny, gauname

$$\rho = e(\rho\cos\varphi + c) - a,$$

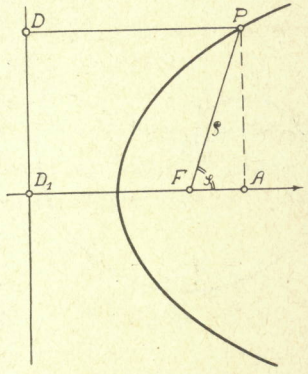
$$\rho = \frac{ce - a}{1 - e\cos\varphi}$$

ir, pagaliau,

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}, \qquad (6)$$

taigi tokias pat lygtis, kaip elipsės. Skirtumas tik tas, kad elipsėj $e < 1$, o hiperbolėj $e > 1$.

§ 67. ŽIDININĖS PARABOLĖS LYGTYS.



Židininės parabolės lygtys lengviausiai yra gaunamos betarpiškai iš parabolės definicijos

$$PF = PD.$$

Bet $PF = \rho$, o $PD = D_1F + FA = p + \rho\cos\varphi$. Taigi

$$\rho = p + \rho\cos\varphi;$$

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\varphi}. \qquad (7)$$

Kadangi numerinis hiperbolės ekscentricitetas lygus vienetui, tai ir parabolės lygtys gali būti parašytos visiškai taip pat, kaip elipsės ir hiperbolės, būtent,

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}.$$

Tinka, pagaliau, šios lygtys ir apskritimui, nes jo $e = 0$ ir šios lygtys virsta lygtimis

$$\rho = p.$$

Iš čia matome, kad poliarinėj koordinatų sistemoj visų antrojo laipsnio kreivių židininės lygtys yra vienodos. Lygčių

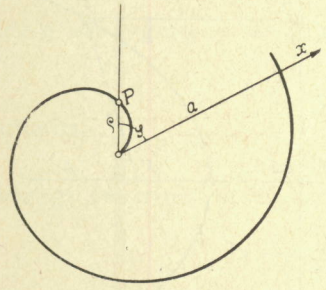
$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$$

kreives apibūdina numerinis ekscentricitetas:

jei $e > 1$, yra hiperbolė,
„ $e = 1$, „ parabolė,
„ $e < 1$, „ elipsė,
„ $e = 0$, „ apskritimas.

§ 68. ARCHIMEDO SPIRALĖ.

Jeigu poliarinės koordinatų sistemos ašį imtume vienodu greičiu sukti aplink koordinatų pradžią ir jei tuo pačiu metu iš taško O slinktų taip pat vienodu greičiu sukamąja ašimi taškas P, tai jo pėdsakas sudarytų liniją, kurią vadiname Archimedo spirale (žiūr. brėž. 49).



49 brėž.

Pažymėję kelią, kurį nueina taškas P per vieno ašies apsisukimo laiką, a, galime parašyti proporciją

$$\rho : a = \varphi : 2\pi;$$

$$\rho = \frac{a.\varphi}{2\pi}.$$

Tarę, kad pastovus koeficientas $\frac{a}{2\pi} = k$, Archimedo spiralės lygtis galime parašyti:

$$\rho = k\varphi. \qquad (8)$$

Šitos labai paprastos lygtys būtų daug sudėtingesnės, jeigu vietoj poliarinės koordinatų sistemos imtume ortogonalinę. Už tat iš dviejų ar daugiau įprastų koordinatų sistemų vartojame tą, kurioje lygtys būna paprastesnės. O paprastas atskirų sistemų sąryšis leidžia, kada reikia, iš vienos koordinatų sistemos pereiti į kitą.

§ 69. PARAMETRINIS FUNKCIJŲ IŠREIŠKIMAS.

Daugelį sudėtingų ir daugiareikšmių funkcijų (ortogonalinėj ir poliarinėj koordinatų sistemoj) galime daug paprasčiau išreikšti, pasirinkę trečią kokį kintamąjį dydį ir per jį išreiškę turimosios funkcijos argumentą ir funkciją. Sakysim, funkcijai

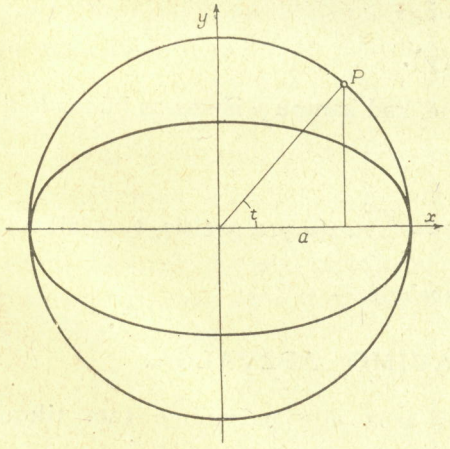
$$y = f(x)$$

kitaip išreikšti mes pasirenkame naują argumentą t taip, kad

$$x = \varphi(t) \text{ ir } y = \varphi(t). \qquad (9)$$

Toksai funkcijos išreiškimas, pasinaudojant dviejomis lygtimis su vienu bendru argumentu, vadinasi parametrinis. Pats kintamasis t — parametru. Apskritimo funkcija

$$x^2 + y^2 = a^2$$



50 brėž.

parametriškai gali būti išreikšta

$$x = a\cos t$$
$$y = a\sin t,$$

kur t reiškia atitinkamą centrinį kampą. Panašiai elipsė (žiūr. 50 br.)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

parametriškai gali būti išreikšta lygtimis

$$x = a\cos t \qquad y = b\sin t.$$

Kreivės ilgis ortogonalinėj sistemoj (§ 59) buvo

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Jei

$$x = \varphi(t) \quad \text{ir} \quad y = \psi(t), \text{ be to,} \quad \alpha = \varphi(a) \quad \text{ir} \quad \beta = \psi(b),$$

tai

$$dx = \varphi'(t)dt \quad \text{ir} \quad dy = \psi'(t)dt$$

ir

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt.$$

Taikydami šią naują formulę apskritimo ilgiui surasti, gauname

$$C = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t) r^2} \,.\, dt = 2\pi r.$$

Uždaviniai:

273. Riedant apskritimui x ašimi, bet kuris apskritimo taškas brėžia liniją, cikloide vadinamą. Jos parametriškos lygtys:

$$x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t).$$

Reikia: 1. nusibrėžti cikloidė,
2. rasti cikloidės ilgis,
3. rasti ortogonalinėj sistemoj cikloidės lygtys pavidalu

$$x = f(y).$$

274. Mechanikoj įrodome, kad kampu α išmestas kūnas lekia kreive, kurios

$$x = v\cos\alpha \,.\, t, \quad y = v\sin\alpha \,.\, t - \frac{gt^2}{2}. \quad (v \text{ yra greitis, } t \text{ — laikas}).$$

Įrodyti, kad ši kreivė yra parabolė.

§ 70. SKAIČIAVIMO APŽVALGA.

Vienodų daiktų skaičių arba eilę pažymime tam tikrais ženklais, skaičiais vadinamais, pav.,

$$1, 4, 10, 20; \; a, b, m, \ldots$$

Tai sveikieji aritmetiniai skaičiai.

Atskirus skaičius galime sudėti į krūvą. Sudėties veiksmą dar pavaduojame kai kada daugyba, o šią — laipsnin kėlimu. Atvirkštiniai veiksmai šiems trims veiksmams yra atimtis, dalyba ir šaknies traukimas.

Kai atėminys lygus turiniui, tai liekanos nebėra. Šiam pažymėti vartojame simbolį 0. Pagaliau, kai turinys mažesnis už atėminį, tai paprasta prasme atimtis nebegalima. Norėdami, kad ji būtų galima, praplečiame savo skaičių sistemą neigiamais skaičiais ir susipažįstame su jų prasme. Panašiai, norėdami pasidaryti visada galimą dalybą, susidarome trupmeninius skaičius. Dar daugiau sistemą praplečiame, įtraukdami į ją ir irracionalinius skaičius, kurie racionaliniais tegali būti išreikšti tik apytikriai. Tuo būdu gauname neaprėžtą eilę konkretinių skaičių:

$$\ldots -5, -2, -1, 0, +1, +1{,}1, +1\tfrac{1}{3}, +\sqrt{2}, +\sqrt[3]{2}. \quad 2, \ldots$$

arba bendrinių

$$-a, -b, \sqrt{a}, 0, +a, +b, +c, +\sqrt{a}, \ldots$$

Skaičiuoti su dideliais skaičiais, ypač traukti aukštesnio, negu antro laipsnio šaknis iš didelių skaičių, reikia daug laiko arba esti visiškai neįmanoma. Tokį tiesioginį skaičiavimą todėl pavaduojame logaritminiu. Tam tikslui kiekvieną skaičių pavaduojame jo rodikliu prie vieno ir to paties susitarto pagrindo (pav., 10-ties). Logaritmiškai skaičiuodami, daugybą ir dalybą pavaduojame sudėtimi ir atimtimi, o laipsnin kėlimą ir šaknies traukimą — daugyba ir dalyba. Skaičių rodikliniai pakaitai surašyti logaritmų knygelėse.

Šaknį traukdami susiduriame ne tik su techniškomis veiksmo sunkenybėmis; šaknis, kaip pav., $\sqrt{-4}$, gali būti visiškai negalima; realybėj tokia reikšmė visiškai niekur nepasitaiko. Tokioms šaknims žymėti vartojame naujas sąvokas ir simbolius: menamos šaknies, tariant, menamo irracionalinio skaičiaus su jo simboliu i sąvoką:

$$\sqrt{-a^2} = ai.$$

Menamieji ir kompleksiniai (mišrieji) dydžiai kai kuriuose veiksmuose gali virsti vėl realiniais. Pav., $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$. Dėl to operuojame ir su jais. Pagaliau, kompleksiniai dydžiai reikalingi vieniems gamtos reiškiniams aprašyti, kaip paprastieji realiniai — kitiems.

Greta konkretinių ir pastovių skaičių matematika vartoja ir kintamuosius. Jei nuo vieno kintamo dydžio pareinamai kinta antras, tai tas antras vadinamas pirmojo funkcija. Elementarinė matematika tyrinėja tik kai kurias vieno argumento funkcijas: algebrines, trigonometrines ir kitas. Ypatingos reikšmės ne tik grynai teoretiškai, bet ir praktikos reikalui, turi nulinės ir ekstreminės funkcijų reikšmės. Pirmąsias nagrinėja algebra lygčių moksle, antrąsias — diferencialinis skaičiavimas.

Pirmieji žingsniai aritmetikos su algebra iš vienos pusės ir geometrijos iš antros, rodos, maža bendra teturi, nors tie mokslai yra tos pačios matematikos šakos. Ilgainiui, pasinaudojus koordinatų sistemomis, tų šakų sąryšis darosi vis aiškesnis. Analizinė geometrija ir integralinis skaičiavimas vaizdžiai parodo, kaip visokie geometriški klausimai gali būt sprendžiami analitiniu (algebriniu) metodu, o pati algebra, norėdama būti vaizdesnė, nevengia geometrinių (grafinių) metodų. Ribos tarp atskirų matematikos šaku kaip ir išdyla.

Tačiau matematikos uždavinys aukštesniojoj mokykloj yra ne tik išmokyti spręsti visokie gyvenimo klausimai, bet ir išplėtoti protinės ir vaizduotės pajėgos, be kurių negali būti žmogus užtenkamai šviesus.

TURINYS

Pusl.

Autoriaus žodis 3

I SKYRIUS

Koordinatų sistema. Tiesės lygtys.

§ 1. Tiesės taškai ir skaičiai 5
§ 2. Tiesės atkarpų ilgumas 6
§ 3. Paviršiaus taškų vietos reiškimas skaičiais 6
§ 4. Bendrinės tiesės lygtys 8
§ 5. Kiti tiesės lygčių pavidalai 12
§ 6. Tiesės dviejų taškų atstumas nuo vienas antro 15
§ 7. Taško atstumas nuo tiesės 16
§ 8. Tiesių susikirtimas 17
§ 9. Atkarpos dalymas duotuoju santykiu 19
§ 10. Trikampio plotas 20
§ 11. Koordinatų sistemos transformavimas 22
§ 12. Koordinatų sistemos transformavimo pavyzdys 24
§ 13. Analitinės geometrijos dalykas 25

II SKYRIUS

Funkcijos ir jų išvestinės.

§ 14. Funkcijų sąvoka 28
§ 15. Tolydinės funkcijos 30
§ 16. Funkcijų klasifikacija 32
§ 17. Vienareikšmės ir daugiareikšmės, tiesioginės ir atvirkštinės funkcijos 35
§ 18. Funkcijos ribos sąvoka 37
§ 19. Natūralinių logaritmų pagrindas 39
§ 20. Skaičius π 41
§ 21. Trigonometrinės funkcijos ir argumento santykio ribos pavyzdys 42
§ 22. Skaičiavimas su ribomis 43
§ 23. Išvestinė, arba diferencialų santykis 44
§ 24. Išvestinės geometrinė ir mechaninė reikšmė 46
§ 25. Funkcijų sumos, sandaugos ir dalmens diferenciavimas 48

Pusl.
§ 26. Laipsnio funkcijos diferenciavimas 51
§ 27. Funkcijos diferencialas. Sudėtinių funkcijų diferenciavimas 53
§ 28. Atvirkštinių, specialiai irracionalinių, funkcijų diferenciavimas 54
§ 29. Trigonometrinių funkcijų diferenciavimas 56
§ 30. Rodiklinių ir logaritminių funkcijų diferenciavimas 59

III SKYRIUS

Algebrinės antrojo laipsnio funkcijos.

§ 31. Antrojo laipsnio lygtys su dviem kintamaisiais ir geometrinis jų vaizdas 61
§ 32. Apskritimas 62
§ 33. Apskritimas ir tiesė 64
§ 34. Apskritimo tangentė ir normalė 65

Elipsė.

§ 35. Centrinės elipsės lygtys 66
§ 36. Viršūninės elipsės lygtys 70
§ 37. Elipsė ir tiesė 71
§ 38. Elipsės tangentė ir normalė 73

Hiperbolė.

§ 39. Hiperbolės lygtys 75
§ 40. Hiperbolė ir tiesė 77
§ 41. Hiperbolės tangentė, normalė ir asimptotė 78
§ 42. Lygiakraštės hiperbolės asimptotinės lygtys 79

Parabolė.

§ 43. Parabolės lygtys 80
§ 44. Parabolė ir tiesė 82
§ 45. Bendrosios antrojo laipsnio lygtys 84

IV SKYRIUS

Funkcijų ekstremai.

§ 46. Funkcijų didėjimas bei mažėjimas ir jų išvestinė ... 89
§ 47. Funkcijos ekstremai 91
§ 48. Antroji funkcijos išvestinė ir ekstremai 94
§ 49. Funkcijų sudarymas ir jų tyrimas 99

Pusl.

V SKYRIUS

Integralinis skaičiavimas.

§ 50. Apibrėžtinis integralas 103
§ 51. Pagrindinės apibrėžtinio integralo savybės 105
§ 52. Neapibrėžtinis integralas ir jo išvestinė 106
§ 53. Primitivinė funkcija ir jos sąryšis su apibrėžtiniu integralu 109
§ 54. Elementarinės integravimo formulės 112
§ 55. Trupmeninių funkcijų integravimas 113
§ 56. Integravimas pakeičiant argumentą 117
§ 57. Dalinė integracija 118
§ 58. Paprastesnių irracionalinių funkcijų integravimas .. 119
§ 59. Kreivių ilgis 121
§ 60. Suktinių kūnų paviršius 122
§ 61. Suktinių kūnų tūris 123

VI SKYRIUS

Kreivių lygtys poliarinėse koordinatose.

§ 62. Poliarinė koordinatų sistema 124
§ 63. Apskritimo lygtys 125
§ 64. Centrinės elipsės ir hiperbolės lygtys 125
§ 65. Židininės elipsės lygtys 126
§ 66. Židininės hiperbolės lygtys 127
§ 67. Židininės parabolės lygtys 127
§ 68. Archimedo spiralė 128
§ 69. Parametrinis funkcijų išreiškimas 129
§ 70. Skaičiavimo apžvalga 130

To paties autoriaus knygos:

1. **Astronomijos** (arba kosmografijos) vadovėlis.
2. **Iš kur mes ateiname?** Parašyta pagal žinomą gamtininką astronomą T. Moreux.
3. **Kur mes esame?** Pagal tą patį autorių; išeis gale metų.
4. **Biržų gimnazija.** Monografija, redaguota drauge su J. Kutra.

Walker Fachberatung

DR. A. JUŠKA

MATEMATINĖS ANALIZĖS PAGRINDAI

ANALITINĖS GEOMETRIJOS, DIFERENCIALINIO IR INTEGRALINIO SKAIČIAVIMO VADOVĖLIS AUKŠTESNIAJAI MOKYKLAI

Švietimo Ministerijos Knygų ir Mokslo priemonių Tikrinimo Komisijos pripažintas tinkamu vadovėliu aukštesniajai mokyklai. (Protokolas Nr. 449).

SAKALO B-VĖ — KAUNAS