Lietuvos matematikos mokytojų asociacijos konferencija

2012 m. gruodžio 28 d.

Abstraktaus mąstymo elementų ugdymas mokykloje: siekiamybė ar iliuzija?

Rimas Norvaiša

(VU MII; tinklaraštis: http://www.norvaisa.lt)

1. Abstraktaus mąstymo samprata mokyklinėje matematikoje.
2. Abstraktaus mąstymo ugdymas mokant trupmenas.
3. Abstraktaus mąstymo elementų ugdymo poreikis ir galimybės.

1.Abstraktaus mąstymo samprata mokyklinėje matematikoje

Abstraktus mąstymas yra mąstymas apie sąvokas. Sąvoka yra kurio nors objektų (daiktų) rinkinio vardas. Sąvoką apibūdina požymiai, pagal kurį objektai yra apjungiami į rinkinį; tai vadinama sąvokos turiniu arba intensija. Kitas būdas apibūdinti sąvoką yra rinkinį sudarančių objektų išvardijimas; tai vadinama sąvokos apimtimi arba ekstensija. Pavyzdžiui, sąvokos *pilis* turiniu yra toks enciklopedijoje siūlomas apibūdinimas: uždaras gynybinių įrenginių bei gyvenamųjų, ūkinio, kulto ir kitų pastatų kompleksas. Sąvokos *pilis* apimtimi būtų konkrečios pilys: Gedimino pilis, Trakų pilis ir t.t. Taigi, sąvoka yra abstrakcija.

Šio pranešimo kontekste, apie abstraktų mąstymą galima pasakyti konkrečiau; tai yra samprotavimas apie mokyklinės matematikos sąvokas. Matematikos sąvokos labai skiriasi nuo realaus pasaulio sąvokų naudojamų kasdieniniame gyvenime. Apibūdinant realaus pasaulio sąvokas dažniausiai pakanka remtis sąvokos apimtį sudarančiais konkrečiais pavyzdžiais. Taip yra minėtos sąvokos *pilis* atveju. Toks sąvokos apibūdinimas nėra tikslus ir vienareikšmis. Pavyzdžiui, apie daugelį objektų Vilniuje ir jo apylinkėse būtų sunku vienareikšmiškai tvirtinti ar tai yra pilis, ar ne. Tačiau bendrinėje kalboje pakanka apytikrio sąvokų supratimo.

Tuo tarpu matematikos sąvokai yra būtinas tikslus jos prasmės apibrėžimas dėl keletos priežasčių. Pirma, matematikos sąvokos apimtį sudarantys objektai realiame pasaulyje neegzistuoja. Be to, jauno žmogaus patirtis yra nepakankama matematikos sąvoką apibūdinti remiantis tik pavyzdžiais, su kuriais jis greičiausiai niekada nėra susidūręs. Antra, matematiniai objektai turi savybių, kurių neturi realaus pasaulio objektai. Pavyzdžiui, apie bet kuriuos du matematikos objektus galima pasakyti ar jie lygūs, ar ne. Šią savybę naudojame kai bandome nustatyti lygybę tarp konkrečios kvadratinės lygties šaknų (vienas objektas) ir tam tikros skaičių aibės (kitas objektas). Trečia, matematinis įrodymas yra loginis samprotavimas, kuriuo lyginami keli matematikos objektai ar kelios matematikos sąvokos. Toks lyginimas įmanomas tik žinant objektą apibudinančias sąvybas, kurios matematikoje paprastai formuluojamos apibrėžtimi. Kol nėra žinoma vienareikšmė sąvokos apibrėžtis, tol nėra įmanomas joks matematinis įrodymas.

Tačiau mokyklinėje matematikoje nėra įmanoma matematiškai be priekaištų suformuluoti visas reikalingas sąvokas. Tokie bandymai per pastaruosius 50 metų skirtingose šalyse patyrė nesėkmes. Pavyzdžiui, mokykliniai bandymai aksiomų pagalba aiškinti tokias sąvokas, kaip *taškas*, *tiesė* ir *plokštuma,* nepateisino lūkesčių. Todėl tenka apsiriboti šių matematikos objektų savybių neformaliu apibūdinimu. Tačiau, nesileidžiant į smulkmenas, verta paaiškinti, kad matematikoje šios sąvokos tiksliai apibrėžiamos aksiomomis.

Realusis skaičius yra kitas sudėtingos sąvokos pavyzdys, be kurios mokykloje neįmanoma išsiversti. Kita vertus, siekiant matematinio griežtumo, negalima apsiriboti netiksliu šios sąvokos apibūdinimu. Galima būtų realųjį skaičių tapatinti su tašku ant tiesės ir tokia realiojo skaičiaus samprata toliau naudotis nuosekliai. Natūraliųjų skaičių tapatinimas su taškais geometrinėje tiesėje, vadinant ją skaičių tiese, yra naudojamas mokyklinėje matematikoje. Būtent, *skaičių tiesė* yra horizontali pustiesė su begaline seka vienodai nutolusių taškų, tapatinamų su natūraliaisiais skaičiais:

Turėdami skaičių tiesę galime apibrėžti kitą sąvoką.

Apibrėžtis. *Teigiamas realusis skaičius* yra taškas skaičių tiesėje.

Čia apsiribojame teigiamais realiaisiais skaičiais norėdami paaiškinti tik įdėjas. Skaičių tiesėje jau turime pažymėtus natūraliuosius skaičius. Todėl tolesnis mokytojo uždavinys yra skaičių tiesėje nurodyti racionaliųjų ir iracionaliųjų skaičių vietas (taškus), bei tokia jų samprata pagrįsti aritmetines operacijas tarp skaičių.

Tai kas yra (turėtų būti) mokyklinė matematika, jei ji negali būti pilnaverte matematikos dalimi? Atsakydamas į šį klausimą, amerikiečių matematikas *Hung-Hsi Wu* siūlo ieškoti tokios matematinių žinių pateikimo formos, kuri būtų suprantama nematematikams ir tuo pačiu išsaugotų svarbiausius matematikos (abstraktaus mąstymo) principus. Tokia matematikos žinių forma galėtų būti vadinama *matematikos inžinerija*. Mokyklinė matematika būtų pagrindinė matematikos inžinerijos naudojimo sritis. Taip pat, matematikos inžinerija būtų matematikos mokytojų studijų objektu. Tokią matematikos žinių formą iliustruosime trupmenos sąvoka.

2.Abstraktaus mąstymo ugdymas mokant trupmenas

Mano žiniomis trupmenos sąvoka mūsų mokyklinėje matematikoje apibūdinama nesilaikant matematinio griežtumo reikalavimų. Apie trupmenas pasakoma keletas dalykų iš karto: tai ir visumos dalis su konkrečių daiktų dalių iliustracijomis, tai ir dviejų sveikųjų skaičių dalyba, tai ir specialaus pavidalo išraiška ir t.t. Svarbiausi panašių apibūdinimų trūkumai yra tai, kad trupmenos tampa kažkuo labai skirtingu nuo sveikųjų skaičių, o kiekviena aritmetinė operacija tarp trupmenų apibrėžiam be sąryšio su nurodoma jų samprata ir kitomis operacijomis.

Reikia pripažinti, kad analogijos ir metaforos labai padeda suprasti sudėtingas sąvokas ir nenuostabu, kad jos naudojamos mokyklinėje matematikoje. Bet analogijos ir metaforos negali pakeisti tikslių sąvokų ir samprotavimų. Matematikoje racionalieji skaičiai ir aritmetinės operacijos su jais apibrėžiami naudojant ekvivelentumo klases, o tai yra per daug abstraktu moksleiviams. Todėl reikia rasti kompromisinį variantą suderinamą su abstraktaus mąstymo reikalavimais. Čia pabandysime paaiškinti *Hung-Hsi Wu* siūlomą trupmenų sampratą (žr.[2]).

Reikia turėti galvoje, kad siūlomas trupmenų mokymas galėtų būti taikomas 5 ar 6 klasės mokiniams. Tokio amžiaus vaikai jau gali turėti supratimą apie trupmenas kaip kažką, kas yra visumos dalis, pavyzdžiui, „picos dalis“, ar panašiai. Tolesnis trupmenos aiškinimas yra perėjimas nuo trupmenų, siejamų su konkrečiais objektais, prie trupmenų, tapatinamų su taškais skaičių tiesėje. Tai būtų perėjimas nuo „virtuvinės patirties“ naudojimo aiškinant matematiką prie abstraktaus mąstymo matematikoje elementų. Todėl tai reikia daryti atsargiai ir apgalvotai, nuosekliai supažindinant su toliau naudojamų sąvokų prasmėmis.

Pirmiausia skaičių tiesėje nurodysime tas trupmenas, kurių vardikliais yra skaičius trys, t.y. trupmenas $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3},$ ir t.t. Tarkime, kad vienetinis intervalas [0,1] yra „visuma“. Trupmena $\frac{1}{3}$ galėtų būti šios „visumos“ trečioji dalis, t.y. viena iš trijų intervalo [0,1] dalių: $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ arba $[\frac{2}{3}, 1]$. Bet kuris kitas vienetinis intervalas [1,2], [2,3],..., būdamas „visuma“ taip pat turi savo tris trečdalius. Kiekvieną iš tų trečdalių galima susieti su trupmena $\frac{1}{3}$. Tačiau, dėl vienaties, pirmąjį intervalą $[0,\frac{1}{3}]$ pasirinksime trupmenos $\frac{1}{3}$ standartine išraiška:

|▬▬|——|——|——|——|——|——|——|——|——|—— .

0 $\frac{1}{3}$ 1 2 3

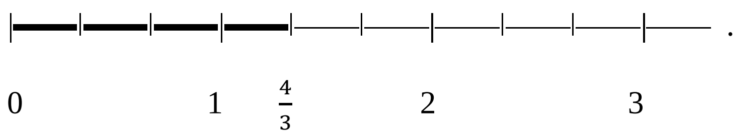
Šis intervalas vieninteliu būdu nusakomas savo dešiniuoju galu:

|——•——|——|——|——|——|——|——|——|——|—— .

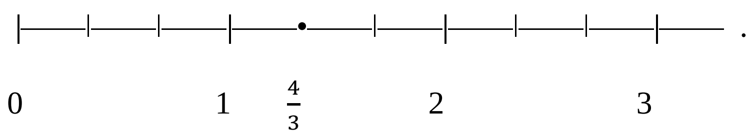
0 $\frac{1}{3}$ 1 2 3

Tai yra taškas skaičių tiesėje toliau tapatinamas su trupmena $\frac{1}{3}$.

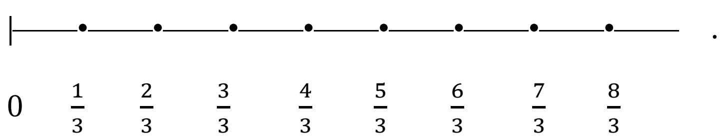
Panašiu būdu, imant vienetinių intervalų trečdalius ir apjungus bet kuriuos keturis iš jų, galima gauti trupmenos $\frac{4}{3}$ išraišką. Dėl vienaties, pasirinksime pirmųjų keturių intervalų junginį, vadindami jį trupmenos $\frac{4}{3}$ standartine išraiška:



Kadangi intervalas vieninteliu būdu nusakomas savo dešiniuoju galu, tai jį tapatinsime su trupmenos $\frac{4}{3}$:



Bendru atveju, su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi *m*, trupmena $\frac{m}{3}$ vieninteliu būdu išreiškiama tašku skaičių tiesėje, kuris yra pirmųjų *m* vienetinio intervalo trečdalių junginio dešinysis galas. Gauti skaičių tiesės taškai sudaro tai, kas toliau vadinama *trečdalių seka*:



Šie samprotavimai apie trupmenas, kurių vardikliais yra trejetas, nesunkiai apibendrinami trupmenoms, kurių vardikliais yra bet kuris natūralusis skaičius *n*=1,2,3,... . Panašiu būdu, dalindami vienetinius intervalus į *n* dalių, gauname trupmenų $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$, ... standartines išraiškas intervalais. Šių intervalų dešinieji galai skaičių tiesėje sudaro tai, kas vadinama *n-tųjų dalių seka.*

Dabar esame pasiruošę apibrėžti trupmenos sąvoką.

Apibrėžtis. *Trupmena* vadinamas kiekvienas *n*-tųjų dalių sekos narys kai *n*=1,2,3,... . *n*-tųjų dalių sekoje esantis *m*-tasis taškas į dešinę nuo 0 žymimas $\frac{m}{n}$.

Trupmenų savybės yra loginės išvados įrodomos remiantis šia apibrėžtimi. Pavyzdžiui, galima įrodyti, kad dvi trupmenos sutampa, jei jos atitinka tą patį tašką skaičių tiesėje. Be to, dėl atitinkamų taškų sutapimo skaičių tiesėje, natūralieji skaičiai išreiškiami trupmenomis:

$$\frac{n}{n} = 1,\ \frac{2n}{n} = 2,\ .....\ \frac{kn}{n} = k,$$

su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi *n*.

Aritmetinės operacijos su trupmenomis apibrėžiamos ne *ad hoc*, bet apibendrinant natūraliųjų skaičių atitinkamas aritmetines operacijas. Pavyzdžiui, skaičių 1 ir 2 suma 1+2 išreiškiama dešiniuoju galu intervalo [0,3] gaunamu apjungiant vienetinio ilgio intervalą [0,1] su iš karto po jo esančiu dvigubai ilgesniu intervalu [1,3]:

|——————|————————————|——

0 1 3

Tokį natūraliųjų skaičių sumos apibrėžimą galima apibendrinti trupmenoms.

Apibrėžtis. Dviejų trupmenų $\frac{m}{n}$ ir $\frac{k}{l}$ suma yra dešinysis galas intervalo gauto apjungiant $\frac{m}{n}$ ilgio intervalą su iš karto po jo esančiu $\frac{k}{l}$ ilgio intervalu. Gauto intervalo dešiniojo galo taškas žymimas $\frac{m}{n} + \frac{k}{l}$.

Visos trupmenų sumos savybės įrodomos naudojantis šia apibrėžtimi. Panašiu būdu galima apibrėžti ir kitas aritmetines operacijas su trupmenomis.

3.Abstraktaus mąstymo elementų ugdymo poreikis ir galimybės

Liko neatsakytas pagrindinis klausimas: Abstraktaus mąstymo elementų ugdymas Lietuvos mokykloje yra siekiamybė ar iliuzija? Manau, kad į šį klausimą atsakys mūsų matematikų ir matematikos mokytojų bendruomenės. Viskas priklausys nuo šių bendruomenių nusiteikimo (ne)keisti dabartinę matematikos mokymo ir studijų praktiką.

Dabartinė matematikos mokymo praktika vadovaujasi nuostata, kad matematikos nauda yra praktinių (realaus gyvenimo) uždavinių sprendimas. Tai atspindi matematikos vidurinio ugdymo programa. Tačiau ši nuostata neatitinka šiandienos matematikos prigimties. Šiandienos matematika ne tik suteikia pagrindą teorinėms žinioms apie gamtą ir visuomenę, bet ir ugdo mūsų protines galias suprasti abstrakcijų pasaulį. Vaizdžiai kalbant, matematika yra proto akys, kurių pagalba žmonija suvokia ją supantį pasaulį ir save. Atsižvelgdama į tai, šiandienos mokykla turėtų imtis ugdyti abstraktaus mąstymo elementus.

Proto galių ugdymas kaip matematikos mokymo tikslas dominavo nuo antikos laikų, išskyrus pastarąjį šimtmetį, kaip tvirtina *Jeong-Ho Woo* (žr. [1]). Tai paaiškinama pastarąjį šimtmetį dominuojančiais technologinės ir ekonominės pažangos siekiais šiuolaikinėse visuomenėse. Tokia padėtis keičiasi sprendžiant pagal tai, kad Amerika, Anglija ir gal būt kitos pasaulio šalys, siekdamos savo visuomenių pažangos, sugriežtintą matematinį ugdymą daro švietimo prioritetu.

Proto galių ugdymas yra būtinas visiems žmonėms, ne tik matematikams ir mokslininkams. Todėl abstraktaus mąstymo ugdymas turėtų tapti matematinio ugdymo tikslu. Tačiau lieka ne mažiau sunki problema. Reikia pripažinti, kad moksleiviai nėra ir negali būti vienodai gabūs matematikai. Kita vertus, turime pripažinti, kad visi moksleiviai turi turėti galimybes atskleisti ir realizuoti savo gabumus. Šią problema galima spręsti organizuojant kelių sudėtingumo lygių matematinį ugdymą (dabartinis bendrasis ir išplėstinis mokyklinės matematikos kursai savo kokybiniu lygiu nesiskiria). Skirtingus lygius galėtų nusakyti skirtingi matematikos ugdymo tikslai.

Išskirkime du matematikos ugdymo tikslus:

1. supažindinti su matematikos galimybėmis spręsti kasdieninio gyvenimo problemas;
2. supažindinti su abstraktaus mąstymo elementais.

Pirmasis tikslas reiškia, kad nagrinėjamos sąvokos ir sprendžiami uždaviniai realaus arba kasdieninio gyvenimo kontekste, t.y. ne matematikos kontekste. Antrasis tikslas reiškia tų pačių dalykų nagrinėjimą matematiniame kontekste. Kitaip tariant, sąvokos apibrėžiamos logiškai nepriekaištingai ir uždaviniai formuluojami matematiniame kontekste. Antrasis tikslas yra būtina sąlyga tam, kad būtų įmanoma moksleivius supažindinti su matematiniu įrodymu.

Šiuo metu Lietuvos mokyklose siekiama tik pirmojo tikslo. Atsižvelgiant į moksleivių gebėjimus ir siekiant antrojo tikslo, galima būtų patobulinti dabartinę dviejų kursų sistema. Tokiu atveju brandos egzaminą galima būtų organizuoti dviem etapais. Pirmąją egzamino dalį laiko *visi* ir vertinami pagal pirmąjį tikslą atitinkančius reikalavimus. Antrąją egzamino dalį laiko *tik tie*, kas nori būti įvertinti pagal antrojo tikslo kriterijus.

Literatūra

[1] ***Jeong-Ho Woo*** (2007). *School mathematics and cultivation of mind*. In: Woo, J.H., Lew, H.C., Park, K.S., Seo D.Y. (editors). Proceedings of the 31-st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, pp. 65-93. Seoul.

[2] ***Hung-Hsi Wu*** (2011). *Understanding Numbers in Elementary School Mathematics*. American Mathematical Society, p. 551.