Begalinė mažybė: matematikos sąvoka ir jos dramatiška istorija

Rimas Norvaiša (2014 m. rugsėjo 15 d.)

Šiuolaikinėje matematikoje begalinė mažybė (angl. infinitesimal) yra logiškai pagrindžiama sąvoka: hiperrealusis skaičius nestandartinėje analizėje ir mikrodydis sintetinėje diferencialinėje geometrijoje. Tačiau taip buvo ne visada. Begalinė mažybė yra pagarsėjusi kaip naudinga, naudota dar antikos laikais, bet logiškai nepagrindžiama matematinė sąvoka. Savo laiku buvo vadinama ,,išnykstančiu vaiduokliu" , ,,chimeros bacila" ir panašiai. Šios sąvokos evoliucija susijusi su tolydumo (kontinuumo) ir diskretumo sampratos evoliucija ir šia prasme svarbi ne tik matematikoje.

Be galo mažu dydžiu arba *begaline mažybe* vadinamas skaičius a, jei toks yra, kuriam teisinga: $-1/n < a < 1/n$ su kiekvienu natūraliuoju skaičiumi n. Tarp realiųjų skaičių tik nulis yra be galo mažas dydis. Nenuliniai be galo maži dydžiai gaunami praplečiant realiųjų skaičių aibę.

Kaip matematikoje atsiranda poreikis be galo mažiems dydžiams?

Momentinis greitis. Tarkime, kad dalelės judėjimą geometrine tiese nusako funkcija $y = y(x)$ tarp realiųjų skaičių, čia x yra laikas ir y yra nueitas kelias. Norime apibrėžti *momentinį greitį,* kaip laiko funkciją. Fiksuokime laiko momentą x_0 ir nagrinėkime laiko intervalą Δx.

Vidutinis greitis VG tarp laiko momentų x_0 ir $x_0 + \Delta x$ yra santykis

$$\mathrm{VG} = \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}, \text{ čia } \Delta x \neq 0.$$

Kai judėjimas vyksta „pastoviu" greičiu, t.y. kai $y(x) = kx$, tai vidutinis greitis yra skaičius k. Tarkime, kad dalelė juda netolygiai pagal dėsnį $y(x) = x^2$. Kaip apskaičiuoti momentinį greitį momentu x_0? Pastarajame pavyzdyje

$$\mathrm{VG} = \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

Intuityviai kyla noras momentiniu greičiu (momentu x_0) laikyti $2x_0$, t.y. tiesiog „numesti" Δx. Bet VG skaičiavimas remiasi prielaida, kad $\Delta x \neq 0$.

Galimi keli samprotavimo būdai pagrindžiantys „numetimą“. Pirmasis grindžiamas *ribos* sąvoka (šiuolaikinėje matematinėje analizėje). Pažymėkime VG = f(Δx). Šios reikšmės apibrėžia funkciją f kai argumentas nėra lygus nuliui. Taške nulis funkcija f yra neapibrėžta. Pagal ribos apibrėžimą, $2x_0$ yra funkcijos f riba taške 0, jei

$$(\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists\ \delta > 0)\ (\forall\ \Delta x \in \mathbf{R})\quad [\,0 < |\Delta x| < \delta \Rightarrow |f(\Delta x) - 2x_0\,| < \varepsilon\,].$$

Iš tikro, tegul $\varepsilon > 0$ ir $\delta = \varepsilon$. Tada

$$|f(\Delta x) - 2x_0\,| = |\,(2x_0 + \Delta x) - 2x_0\,| = |\Delta x| < \delta = \varepsilon.$$

Gavome, kad šiuo atveju momentinis greitis MG = $\lim_{\Delta x \to 0} f(\Delta x) = 2x_0$.

Ribos sąvokos autoriais yra *B. Bolzano* (1781-1848) ir *K. Weierstrass*as (1815-1897).

Antrasis samprotavimo būdas grindžiamas *be galo mažo dydžio* samprata. Sakysime, kad skaičiai r ir s yra be galo artimi arba $r \approx s$, jei jų skirtumas r-s yra be galo mažas dydis. Tada samprotaujama tariant, kad Δx yra be galo mažas dydis, t.y.

$$\text{jei}\ \ \Delta x \approx 0,\ \text{tai}\ f(\Delta x) \approx 2x_0.$$

Iš tikro, tegul $\Delta x \approx 0$. Tada

$$f(\Delta x) - 2x_0 = (2x_0 + \Delta x) - 2x_0 = \Delta x \approx 0.$$

Gavome tą patį momentinį greitį.

Manoma, kad antrasis samprotavimas yra lengviau suprantamas tiems, kas nėra susipažinęs su realiųjų skaičių teorija ir ribos teorija, t.y. nėra susipažinęs su šiuolaikine matematine analize. Kaip matematikoje (nestandartinėje analizėje) pagrindžiamas toks samprotavimas?

Hiperrealieji skaičiai. Sukonstruosime realiųjų skaičių aibės **R** plėtinį $^*\mathbf{R}$, kuriame yra be galo mažų ir be galo didelių dydžių. Aibės $^*\mathbf{R}$ elementai vadinami *hiperrealiaisiais* skaičiais. Konstrukcija labai panaši į tą, kuri naudojama sukonstruoti realiųjų skaičių aibę **R** naudojant racionaliųjų skaičių *Cauchy* sekas. Naujos aibės elementais bus realiųjų skaičių sekų „ryšuliai“ (ekvivalentumo klasės) gaunami grupuojant sekas pagal tam tikrą požymį.

Tegul $\mathbf{R}^\infty$ yra visos realiųjų skaičių sekos (r_k). Pvz., seka (k)=(1,2,3,...) $\in \mathbf{R}^\infty$. Sekų aibėje $\mathbf{R}^\infty$ apibrėšime ekvivalentumo sąryšį sakydami, kad $(r_k) \sim (s_k)$ jei indeksų aibė $\{k \in \mathbf{N}: r_k = s_k\}$ yra „didelė“ natūraliųjų skaičių aibėje **N**. Indeksų aibės „didumas“ ir „mažumas“ turi savybes:

1) kiekvienas **N** poaibis yra arba „didelis“ arba „mažas“, bet ne kartu;
2) visos baigtinės aibės yra „mažos“;
3) visos kobaigtinės (papildymas yra baigtinis) aibės yra „didelės“;
4) „didelės“ aibės papildymas yra „maža“ aibė ir atvirkčiai;
5) dviejų „didelių“ aibių sankirta yra „didelė“.

Tam tikra natūraliųjų skaičių aibių klasė, vadinama laisvuoju ultrafiltru, turi šias savybes. Tapatindami ekvivalenčias sekas gausime hiperrealiųjų skaičių aibę $^*\mathbf{R}$. Jai priklauso ir visi realieji skaičiai; jais yra ekvivalentumo klasė, kuriai priklauso seka (r,r,...). Pavyzdžiui, ekvivalentumo klasė, kuriai priklauso seka

$\omega = (1,2,3,......,n,........)$ yra be galo didelis dydis;

klasė, kuriai priklauso seka

$1/\omega = (1,1/2,1/3, ..., 1/n,....)$ yra be galo mažas dydis;

klasė, kuriai priklauso seka

$1/\omega^2 = (1,1/4,1/9,.....,1/n^2,....)$ yra kitas be galo mažas dydis.

Aritmetiniai veiksmai ir tvarka aibėje $^*\mathbf{R}$ apibrėžti pakoordinačiui. Kaip ir realiųjų skaičių aibė, $^*\mathbf{R}$ tenkina tas pačias savybes, t.y. sudaro lauką, bet nėra pilna.

Hiperrealiųjų skaičių lauke $^*\mathbf{R}$ yra standartiniai realieji skaičiai r, be galo maži skaičiai a ir be galo dideli skaičiai. Greta standartinio realiojo skaičiaus be galo arti jo yra hiperrealiųjų skaičių „spiečius“. Tiksliau kiekvieną hiperrealųjį skaičių x galime išskaidyti į sumą H+r+a, čia H yra hipernatūralusis, realusis $r \in [0,1)$ ir a be galo mažas dydis. Hiperrealiųjų skaičių aibėje apibrėžta funkcija š( ), kuri kiekvienam hiperrealiajam skaičiui x priskiria vienintelį be galo arti jo esantį standartinį realųjį skaičių x_0, t.y. š(x) = x_0, čia $x \approx x_0$. Funkcija š( ) vadinama *standartine dalimi* arba *šešėliu*. Pavyzdžiui, jei a yra be galo mažas dydis, tai š(a) = 0.

Dešimtainės trupmenos. Realiųjų skaičių dešimtainės trupmenos suteikia intuityvią išraišką tokiems skaičiams. Tačiau begalinės dešimtainės trupmenos turi ir keistų savybių, pavyzdžiui, galioja lygybė

$$0.999... = 1.$$

Kita vertus, su kiekvienu teigiamu be galo mažu dydžiu a turime 1-a <1. Ar hiperrealieji skaičiai turi dešimtainės trupmenos išraiškas ir ar tokioms išraiškoms gali galioti nelygybė 0.999... < 1?

Realiojo skaičiaus r ϵ (0,1] išraiška dešimtaine trupmena yra lygybė

$$r = 0.a_1a_2a_3...... = a_1/10+a_2/10^2+a_3/10^3+..... = \lim_{n\to\infty}(a_1/10+...+a_n/10^n).$$

Galimi trys atvejai: baigtinė dešimtainė trupmena (a_n=0 visiems n >N), periodinė dešimtainė trupmena ir ne periodinė dešimtainė trupmena. Kiekvienas racionalusis skaičius išreiškiamas baigtine arba/ir periodine dešimtaine trupmena.

$$\text{Taigi} \quad 0.999... = \lim_{n\to\infty}(0.\underbrace{999...9}_{n\ devynet\text{ų}}) \qquad (*)$$

$$= 9/10 \lim_{n\to\infty}(1+1/10+...+1/10^{n-1}) = \lim_{n\to\infty}(1-1/10^n) = 1,$$

čia panaudota geometrinės progresijos sumos formulė. Realiojo skaičiaus žymėjimo dešimtaine trupmena autorius yra jėzuitas C.Clavius 1593 m. Toks žymėjimas kompaktiškas bet neatitinka intuicijos, kurios dar nepaveikė šiuolaikinės analizės žinios (ribos sąvoka). Nesiremiant realiųjų skaičių teorijos ir ribų teorijos žiniomis simbolis 0.999... apibūdinamas kaip dešimtainė begalinė periodinė trupmena su **be galo daug devynetų** arba **neribotai daug devynetų**. Tokiu atveju (*) lygybė 0.999... = 1 atrodo prieštaraujančia intuicijai. Neveltui!

Tegul H ϵ $\mathbf{N}_{\mathbf{Sko}}\backslash\mathbf{N}$, t.y. begalinis hipernatūralusis skaičius. Atsižvelgdami į jau naudotą lygybę

$$0.\underbrace{999...9}_{n\ devynet\text{ų}} = 1 - \frac{1}{10^n},$$

sudarykime dešimtainę trupmeną, kurioje yra H devynetų:

$$0.\underbrace{999....9}_{H\ devynet\text{ų}} = 1 - \frac{1}{10^H}.$$

Kadangi be galo mažas dydis $1/10^H$ yra teigiamas, tai dešinioji pastarosios lygybės pusė yra mažesnė už vienetą. Tokias hiperrealiųjų skaičių dešimtaines trupmenas pasiūlė A.H. Lightstone (1972) ir žymėjo taip:

$$0.999...;...99\hat{9} := 1 - \frac{1}{10^H} < 1.$$

Naudodami šešėlio funkciją turime š(0.999...;...99$\hat{9}$) = 1. Taigi šešėlio vaidmuo yra panašus į ribos vaidmenį standartinėje analizėje: pirma, reiškinys įvertinamas begaliniame taške H ir, antra, įvertinamas gauto hiperrealaus skaičiaus šešėlis.

Grįškime prie dalelės judėjimo apibrėžiamo funkcija y = x^2 ir paskaičiuosime jos greitį laiko momentu x = 1. Tarkime, kad pokytis Δx = - 1/10^H = - 0.000...;...01 (?). Tada

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(1+\Delta x)-y(1)}{\Delta x} = \frac{(0.999\ldots;\ldots999)^2-1^2}{0.999\ldots;\ldots999-1} = 0.999\ldots;\ldots99\hat{9} + 1.$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{š}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \text{š}\,(0.999\ldots;\ldots99\hat{9} + 1) = 1+1 = 2.$$

Apibendrinant, galime palyginti ribos ir šešėlio sąvokas. Tegul (u_n) = (u_1,u_2,...) yra skaičių seka. Tada

$$\underbrace{\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n}}_{standartin\text{ė}\ analiz\text{ė}} = \underbrace{\boxed{\text{šešėlis}\ (u_H)}}_{nestandartin\text{ė}\ analiz\text{ė}}.$$

Begalinės mažybės evoliucija. Be galo mažo dydžio istorija yra ir matematinės analizės atsiradimo istorija. Čia matematine analize vadinama matematikos sritis atsiradusi greta geometrijos ir algebros.

Be galo mažo dydžio sąvoka visada buvo kontraversinė, nes beveik visą laiką iki 20 a. vidurio buvo logiškai nepagrindžiama. Mūsų matematinėje kultūroje tą kontraversiškumą atspindi ir sąvokos *infinitesimal* vertimas į lietuvių kalbą. Versdamas *infinitesimal* kaip „begalinė mažybė" ar „be galo mažas dydis" aš nusižengiu matematikos terminų žodynui. Ten žodis *infinitesimal* verčiamas fraze „nykstamasis dydis". Tačiau „nykstamasis dydis" šiuolaikinėje matematikoje turi konkrečią reikšmę: kuriame nors taške į nulį konverguojanti funkcija arba į nulį konverguojanti seka. Kitaip tariant, tai yra nuo parametro priklausantis matematinis objektas, kuris artėja į nulį kai tas parametras artėja prie kurios nors savo reikšmės. Tikslią artėjimo arba konvergavimo prasmę nusako šiuolaikinė ribų teorija arba ε – δ apibrėžtis, naudojant matematikų žargoną. „Nykstamasis dydis" išreikšdamas kitimą vargiai suderinamas su hiperrealaus skaičiaus įvaizdžiu. Pastarojo termino taip pat nėra mūsų matematikos terminų žodyne, nors jame yra apie 60 kitų skirtingų terminų su priešdėliu *hiper-* (pvz. hiperkompleksinis skaičius).

Begalinės mažybės sąvoka pradėta naudoti antikos laikais bandant apibūdinti tolydumą. Intuityvia prasme tolydumo idėja arba kontinuumas yra tai, kas neturi „plyšių". Priešingas tolydumui yra diskretumas. Diskretumas yra tai, kas sudaryta iš atskirų, savarankiškų dalių. Tolydumas išreiškia vieningumą (angl. *unity*), o diskretumas išreiškia daugumą (angl. *plurality*). Šis priešpastatymas susijęs su Graikų filosofijai fundamentaliu klausimu apie vienį ir daugę (angl. *the One and the Many*).

Antikinėje matematikoje turėjome dvi matematinių objektų rūšis: skaičius ir dydis (magnitude). Skaičius buvo tai, kas dabar vadinama natūraliaisiais skaičiais. Dydžiais buvo vadinamos įvairios geometrinių objektų charakteristikos (ilgis, tūris ir t.t.). Šios dvi objektų rūšys taip pat atspindėjo diskretumo ir tolydumo skyrimą. Be galo mažas dydis antikoje, vadinamas nedalomuoju (*indivisible*), buvo susijęs su abiem: diskretumu ir tolydumu.

Manoma, kad pirmasis begalinės mažybės kaip nedalomojo idėją matematikoje panaudojo *Democritus* iš *Abdera* (460-370 m. pr. Kr. g.). Dviejų figūrų plotui ar tūriui palyginti jis panaudojo prielaidą, kad figūrą „sudaro" milžiniškas kiekis labai mažų „nedalomų" atomų. Šia prielaida grindžiamas matematinis metodas vadinamas nedalomųjų metodu (angl. *method of indivisibles*). Jei nedalomųjų skaičius yra begalinis ir jų dydis yra nulinis, tai jų „suma" turėtų būti nulinio dydžio. Jei nedalomųjų skaičius yra begalinis ir jų dydis yra nenulinis, tai jų „suma" turėtų turėti begalinį dydį. Dėl šio paradokso nedalomųjų metodas Graikų matematikoje buvo laikomas nepagrįstu. Tam pačiam uždaviniui spręsti buvo sukurtas išsėmimo metodas (angl. method of exhaustion). Nedalomųjų metodas buvo laikomas nelegaliu nors ir efektyviu. Tai liudija *Heiberg*o 1906 m. rastas prarastu laikomas Archimedo darbas "*The Method*". Šis darbas rodo, kad Archimedas (287-212 m. pr. Kr. g.), norėdamas rasti nežinomą atsakymą, greta mechaninio metodo naudojo ir nedalomųjų metodą. Tačiau savo pradinio įrodymo neskelbdavo, o sugalvodavo naują įrodymą grindžiamą išsėmimo metodu.

Begalinė mažybė atgimsta 16 ir 17 amžiais Europoje vis dar nedalomojo pavidale. Nedalomuosius savo darbuose naudojo *Kepler*is, *Galileo, Cavalieri*, *Wallis*as ir kiti matematikai. Šiais metais publikuotoje *Alexander*io knygoje *Infinitesimal. How a dangerous mathematical theory shaped the modern world* vaizdžiai nušviečiama begalinės mažybės istorija ir vaidmuo 16 amžiaus kultūros ir politikos kontekste. Vėliau begalinė mažybė evoliucionuoja *Barrow, Newton*o, *Leibniz*o, *J. Bernoulli* ir kitų žmonių veikloje. 18 amžiuje begalinę mažybę išjuokia *Berkeley*. 19 amžiuje *G. Cantor*as begalinę mažybę pavadino „cholera-bacila" užnuodijusia matematiką. 20 amžiuje *B. Russell*as laiko begalinę mažybę nereikalinga, klaidinga ir sau-prieštaraujančia sąvoka. Tokiu būdu 20 amžiaus pradžioje begalinė mažybė įgijo matematiškai nepagrįstos sąvokos įvaizdį.

Kontinuumas šiuolaikinėje matematikoje. Matematikoje kontinuumu dažnai vadinama realioji tiesė. Savo ruožtu realioji tiesė yra tapatinama (abipus vienareikšmė atitiktis išlaikanti tvarką) su realiųjų skaičių aibe **R** – Dedekindo-Cantoro aksioma. Realiųjų skaičių papilninimas be galo mažais dydžiais priskiriamas *Johann*ui *Bernulli*ui (1667-1748) apie 1693-uosius metus (iš jo laiškų savo mokytojui *Leibniz*ui).

Taigi, turime dvi kontinuumo sampratas (iš tikro jų yra nepaprastai daug):

--- A-kontinuumas

================================= B-kontinuumas

A-kontinuumas dėl Archimedo aksiomos. Šiuolaikinėje matematikoje (*Hilbert*as, 1899) Archimedo aksioma:

$$(\forall\ \varepsilon > 0\ )\ (\ \exists\ n\ \in \mathbf{N}\ )[\ n\varepsilon > 1\ ].$$

Ši aksioma reiškia, kad tarp realiųjų skaičių nėra teigiamų be galo mažų dydžių. B-kontinuumas taip vadinamas *Johann*o *Bernulli*o garbei.

Apie fizikinę tiesę mes nieko kito nežinome, kas nėra išreiškiama matematika. Matematika suteikia fizikinės tiesės sampratą (modelį, interpretaciją). Tiesė fizikoje, laikas yra paprastai tapatinami su matematemine realia tiese, o ši savo ruožtu tapatinama su realiųjų skaičių aibe **R.** Jei turime kelias realiosios tiesės sampratas, tai tuo pačiu turime ir kelias fizikinės tiesės sampratas. Skirtingos fizikinių reiškinių sampratos suteikia mums skirtingą prasmę to, ką stebime pasaulyje. Matematika yra tarsi akiniai per kuriuos mes stebime pasaulį. Skirtingo spektro spalvas praleidžiantys akiniai rodo mums skirtingus pasaulius.

Pagrindinė papildoma literatūra (prieinama per internetą):

- *Keisler H. Jerome. Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*.
- *J. Bair et al*. (12 autorių*). Is Mathematical History written by the victors? Notices of the American Mathematical Society* 60 (2013), no 7, 886-904.
- *T. Bascelli et al* (9 autoriai). *Fermat, Leibniz, Euler, and the Gang: The True History of the Concepts of Limit and Shadow. Notices of the American Mathematical Society* 61 (2014), No 8, 848-864.