Seminaras MII, 2013 m. balandžio 17 d.

# Skaičiaus sampratos mokyklinėje matematikoje matematinės problemos

Pagrindinis pranešimo teiginys: *trupmenos mokomos nesilaikant loginio tikslumo*.

Atliekant mokinių pasiekimų tyrimus ir interpretuojant gautus rezultatus, trupmenų mokymo matematinis korektiškumas paprastai nekvestionuojamas. Tai reiškia netiesioginę prielaidą, kad trupmenų mokymas neturi matematinių problemų. Parodysime, kad ši prielaida negalioja. Palyginimui, tuos pačius faktus apie trupmenas pateiksiu laikantis loginio tikslumo, naudodamas:

Hung-Hsi Wu. Understanding Numbers in Elementary School Mathematics. AMS, 2011.

## Trupmenos apibrėžtis

Trupmenos sąvoka yra viena pirmųjų sukelianti rimtų sunkumų mokantis matematikos mokykloje. Vėliau tokių sunkumų tik daugėja. Siekiant įveikti šiuos sunkumus paprastai naudojamos įvairios pedagoginė priemonės. Trupmenos sąvoką stengiamasi padaryti paprastesne ir aiškesne interpretuojant ją realaus pasaulio kontekste, pavyzdžiui, dalinant picą ar tortą į dalis. Pagrindinė problema yra tai, kad trupmena nėra apibrėžiama matematiškai tiksliai.

Be abejonės, pirmosiose mokyklos klasėse neišvengiamai tenka pradėti nuo intuityvios trupmenos sampratos. Tačiau 5-oje ar 6-oje klasėje yra būtina žengti pirmuosius žingsnius bandant aiškinti abstrakčias sąvokas. Būtina todėl, kad vyresnėse klasėse, susipažįstant su algebra, abstrakcija tampa dar didesne.

Penktos klasės vadovėliuose yra įprasta trupmenos aiškinimą pradėti nuo picos dalinimo, kaip ir pradinėse klasėse. Toliau apie trupmenas pasakome bent keletas dalykų, vienas po kito:

- trupmena yra *dalmuo*, gautas vieną sveikąjį skaičių dalijant iš kito sveikojo skaičiaus;
- trupmena yra viena ar kelios lygios *vieneto* (ar visumos) *dalys*;
- trupmena yra dviejų sveikųjų skaičių *santykis*;
- trupmena yra *dydis* dalies gautos objektą (picą) dalinant į lygias dalis;
- trupmena yra *taškas* skaičių spindulyje.

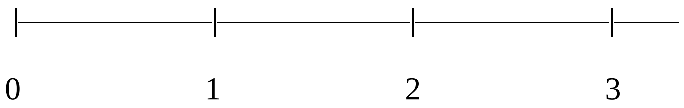
Tokia trupmenos apibūdinimų gausa yra pirmoji problema. Trupmena siejama su iš pažiūros labai skirtingomis sąvokomis. Pirmą kartą bandančiam suprasti trupmenos prasmę, tai yra sunkus išbandymas. Antroji panašių apibūdinimų problema yra ta, kad nei vienas jų nėra naudojamas paaiškinti visas trupmenų savybes, tokias kaip trupmenų ekvivalentumas, tvarka tarp trupmenų ir aritmetinės operacijos su trupmenomis. Kiekviena trupmenų savybė apibrėžiama pasitelkiant vienu iš daugelio apibūdinimu arba tik iliustruojant pavyzdžiais.

Trupmenos 5-oje mokyklos klasėje yra pirmasis moksleivio susidūrimas su abstrakcijomis. Dabartinis trupmenų mokymas visiškai ignoruoja esminius matematikos bruožus: tikslų sąvokų apibrėžimą, susijusių sąvokų (šiuo atveju sveikojo skaičiaus ir trupmenos) loginį suderinamumą ir, kas svarbiausia, savybių ir procedūrų paaiškinimą (pagrindimą) remiantis sąvokų apibrėžtimis. Be supratimo, trupmenų savybes ir procedūras tenka mokytis mintinai. Neišvengiamai prarandama mokinio motyvacija mokytis matematikos.

Reikia pripažinti, kad analogijos ir metaforos labai padeda suprasti sudėtingas sąvokas ir nenuostabu, kad jos naudojamos mokyklinėje matematikoje. Bet analogijos ir metaforos negali pakeisti tikslių apibrėžimų. Matematikoje racionalieji skaičiai ir aritmetinės operacijos su jais apibrėžiami naudojant ekvivelentumo klases, o tai yra per daug abstraktu moksleiviams. Todėl reikia rasti kompromisinį variantą suderinamą su abstraktaus mąstymo reikalavimais. Čia pabandysime paaiškinti *Hung-Hsi Wu* siūlomą trupmenų sampratą (žr.[Wu]).

Kaip galėtų būti

Natūraliųjų skaičių tapatinimas su taškais geometrinėje tiesėje, vadinant ją skaičių tiese, yra naudojamas mokyklinėje matematikoje. Būtent, *skaičių tiesė* yra horizontali pustiesė su begaline seka vienodai nutolusių taškų, tapatinamų su natūraliaisiais skaičiais:

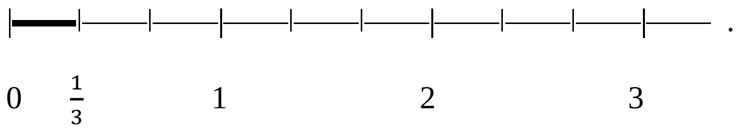



Turėdami skaičių tiesę galime apibrėžti kitą sąvoką.

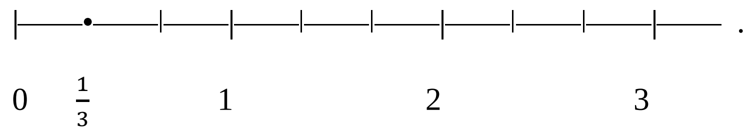
**Apibrėžtis.** *Teigiamas realusis skaičius* yra taškas skaičių tiesėje.

Čia apsiribojame teigiamais realiaisiais skaičiais norėdami paaiškinti tik įdėjas. Skaičių tiesėje jau turime pažymėtus natūraliuosius skaičius. Todėl tolesnis mokytojo uždavinys yra skaičių tiesėje nurodyti racionaliųjų ir iracionaliųjų skaičių vietas (taškus), bei tokia jų samprata pagrįsti aritmetines operacijas tarp skaičių.

Pirmiausia skaičių tiesėje nurodysime tas trupmenas, kurių vardikliais yra skaičius trys, t.y. trupmenas $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3},$ ir t.t. Tarkime, kad vienetinis intervalas [0,1] yra „visuma“. Trupmena $\frac{1}{3}$ galėtų būti šios „visumos“ trečioji dalis, t.y. viena iš trijų intervalo [0,1] dalių: $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ arba $[\frac{2}{3}, 1]$. Bet kuris kitas vienetinis intervalas [1,2], [2,3],..., būdamas „visuma“ taip pat turi savo tris trečdalius. Kiekvieną iš tų trečdalių galima susieti su trupmena $\frac{1}{3}$. Tačiau, dėl vienaties, pirmąjį intervalą $[0,\frac{1}{3}]$ pasirinksime trupmenos $\frac{1}{3}$ standartine išraiška:

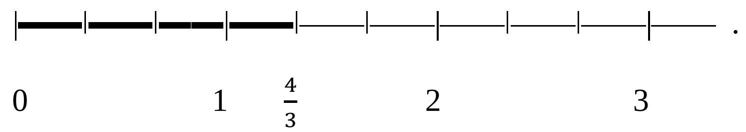


Šis intervalas vieninteliu būdu nusakomas savo dešiniuoju galu:

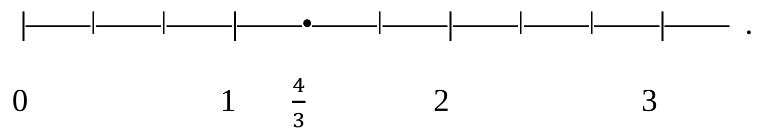



Tai yra taškas skaičių tiesėje toliau tapatinamas su trupmena $\frac{1}{3}$.

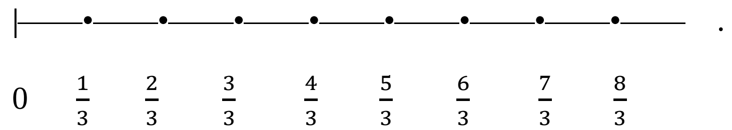
Panašiu būdu, imant vienetinių intervalų trečdalius ir apjungus bet kuriuos keturis iš jų, galima gauti trupmenos $\frac{4}{3}$ išraišką. Dėl vienaties, pasirinksime pirmųjų keturių intervalų junginį, vadindami jį trupmenos $\frac{4}{3}$ standartine išraiška:




Kadangi intervalas vieninteliu būdu nusakomas savo dešiniuoju galu, tai jį tapatinsime su trupmenos $\frac{4}{3}$ :




Bendru atveju, su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi *m*, trupmena $\frac{m}{3}$ vieninteliu būdu išreiškiama tašku skaičių tiesėje, kuris yra pirmųjų *m* vienetinio intervalo trečdalių junginio dešinysis galas. Gauti skaičių tiesės taškai sudaro tai, kas toliau vadinama *trečdalių seka*:




Šie samprotavimai apie trupmenas, kurių vardikliais yra trejetas, nesunkiai apibendrinami trupmenoms, kurių vardikliais yra bet kuris natūralusis skaičius *n*=1,2,3,... . Panašiu būdu, dalindami vienetinius intervalus į *n* dalių, gauname trupmenų $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$, ... standartines išraiškas intervalais. Šių intervalų dešinieji galai skaičių tiesėje sudaro tai, kas vadinama *n-tųjų dalių seka.*

Dabar esame pasiruošę apibrėžti trupmenos sąvoką.

**Apibrėžtis.** *Trupmena* vadinamas kiekvienas *n*-tųjų dalių sekos narys kai *n*=1,2,3,... . *n*-tųjų dalių sekoje esantis *m*-tasis taškas į dešinę nuo 0 žymimas $\frac{m}{n}$.

Trupmenų savybės yra loginės išvados įrodomos remiantis šia apibrėžtimi. Pavyzdžiui, galima įrodyti, kad dvi trupmenos sutampa, jei jos atitinka tą patį tašką skaičių tiesėje. Be to, dėl atitinkamų taškų sutapimo skaičių tiesėje, natūralieji skaičiai išreiškiami trupmenomis:

$$\frac{n}{n} = 1,\ \frac{2n}{n} = 2, \ldots \frac{kn}{n} = k,$$

su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi $n$.

## Ekvivalenčios trupmenos

Vadovėlinis aiškinimas. Tai, kas aiškinama paprastai vadinama pagrindine paprastosios trupmenos savybe. Aiškinama taip: „Nusibraižykite 4 lygius kvadratus. Pirmą kvadratą padalykime į 2 lygias dalis, antrą - į 4, trečią - į 8, ketvirtą – į 16 lygių dalių. Nuspalvokime pusę kiekvieno kvadrato. Užrašykime nuspalvintas dalis trupmenomis.

Piešinys ....

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}.$$

Visos trupmenos viena kitai lygios, nes reiškia lygių kvadratų puses. Paprastąją trupmeną galima užrašyti dalmeniu, todėl pagrindinė dalmens savybė tinka ir paprastosioms trupmenoms.‘‘

Po šių dviejų argunentų seka procedūros apibūdinimas: „Trupmenos skaitiklį ir vardiklį padauginę arba padalįję iš to paties natūraliojo skaičiaus, gauname jai lygią trupmeną.‘‘

Komentaras. Pateikiami du skirtingi argumentai. Pirmuoju argumentu remiantis būtų sunku patikrinti ar trupmenos $\frac{161}{91}$ ir $\frac{253}{143}$ yra ekvivalenčios. Antrasis remiasi prielaida, kad paprastoji trupmena yra dalmuo, t.y. šiame kontekste neapibrėžta sąvoka.

Vikipedia. Padauginus trupmenos skaitiklį ir vardiklį iš to pačio (nenulinio) skaičiaus, gaunama nauja trupmena, kuri yra **ekvivalenti** pirmajai (t. y. jų reikšmės yra vienodos), nes yra išlaikomas tas pats proporcingumas. Pvz.: $\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$. Taip yra todėl, kad dauginti ir skaitiklį, ir vardiklį iš kokio nors skaičiaus n, yra tas pats, kaip dauginti iš trupmenos $\frac{n}{n}$, kuri yra lygi vienetui. Pavyzdžiui, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$ir $\frac{100}{300}$yra ekvivalenčios trupmenos.

Komentaras. Šiuo atveju naudojamasi sudėtingesne, paprastai dar neapibrėžta, trupmenų daugybos procedūra.

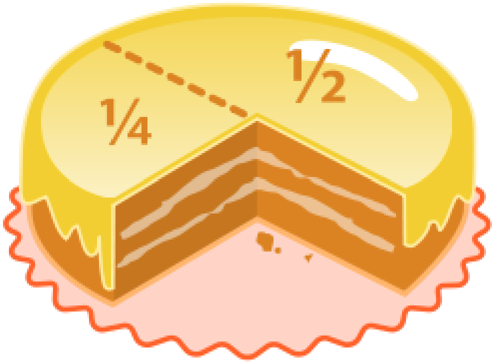
Kaip galėtų būti.

Teorema. Tegul $m/n$ ir $k/l$ yra trupmenos. Tarkime, kad $k=am$ ir $l=an$ su kuriuo nors natūraliuoju skaičiumi $a$. Tada $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$.

Teoremos paaiškinimas pavyzdžiu ir trupmenos apibrėžtimi.

Teoremos įrodymas .....

## Trupmenų sudėtis.




Vienas iš būdų matematiškai sudėti $\frac{1}{2}$torto su $\frac{1}{4}$torto, yra į $\frac{1}{2}$torto žiūrėti kaip į $\frac{2}{4}$. Tada $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$

Kaip galėtų būti.

Aritmetinės operacijos su trupmenomis apibrėžiamos ne *ad hoc*, bet apibendrinant natūraliųjų skaičių atitinkamas aritmetines operacijas. Pavyzdžiui, skaičių 1 ir 2 suma 1+2 išreiškiama dešiniuoju galu intervalo [0,3] gaunamu apjungiant vienetinio ilgio intervalą [0,1] su iš karto po jo esančiu dvigubai ilgesniu intervalu [1,3]:


Tokį natūraliųjų skaičių sumos apibrėžimą galima apibendrinti trupmenoms.

**Apibrėžtis.** Dviejų trupmenų $\frac{m}{n}$ ir $\frac{k}{l}$ suma yra dešinysis galas intervalo gauto apjungiant $\frac{m}{n}$ ilgio intervalą su iš karto po jo esančiu $\frac{k}{l}$ ilgio intervalu. Gauto intervalo dešiniojo galo taškas žymimas $\frac{m}{n}+\frac{k}{l}$.

## Trupmenų daugyba

Vadovėlinis aiškinimas.Prieš apibrėžiant trupmenų daugybą, pateikiama motyvacija. Cituoju: „Viena spalva nuspalvinkite trečdalį stačiakampio, o kita spalva – pusę stačiakampio. Koks stačiakampio plotas nuspalvintas abiem spalvomis?

............................

Matome, kad abiem spalvomis nuspalvinta $\frac{1}{6}$ stačiakampio: $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

Po šios motyvacijos seka procedūros formulavimas: „Daugindami paprastąsias trupmenas, skaitiklį dauginame iš skaitiklio, o vardiklį iš vardiklio‘‘.

Būna ir kitoks aiškinimas, žr. http://lt.wikibooks.org/wiki/Matematika/Paprastosios_trupmenos :

Kaip trupmenas dauginti? Pirmiausiai pasižiūrėkime, ką atitinka dviejų dalybų rezultatų sandauga:

$$(6:2)\cdot(8:4)=3\cdot 2=6,$$
$$(6\cdot 8):(2\cdot 4)=48:8=6.$$

Kaip matome, dviejų dalybų rezultatų sandauga yra lygi dalinių bei daliklių sandaugų dalmeniui. Tai galioja ir kitiems skaičiams. Apibendrinę šį dėsningumą gausime tokį būdą paprastosioms trupmenoms sudauginti: dviejų paprastųjų trupmenų sandaugos skaitiklis ir vardiklis bus, atitinkamai, dauginamųjų skaitiklių ir vardiklių sandaugos. Pavyzdžiui:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Pavyzdžio iš wikibooks pabaiga.

Komentaras: Abiem atvejais motyvacijai naudojamas toliau apibrėžiamos daiginimo procedūros atskiras atvejis. Nusakant procedūrą, apibūdinamas procesas, kurio rezultatas (skaičius) nėra aiškiai apibrėžtas. Kitaip tariant, nėra apibrėžiamas daugybos rezultatas, t.y. sandauga yra trupmena, tenkinanti tam tikras sąlygas.

Kaip galėtų būti. Apibrėždami skaičių daugybą tapatiname skaičių tiesės vienetą 1 ir vienetinio kvadrato (kurio kraštinės yra vienetai 1) plotą. Kitaip tariant, tapatinamos dvi skaičių tiesės: vienoje iš jų vienetas 1 yra vienetinio kvadrato kraštinės ilgis, o kitoje vienetas 1 yra to paties vienetinio kvadrato plotas.

Apibrėžtis. Trupmenų m/n ir k/l sandauga, žymima $\frac{m}{n}\times\frac{l}{k}$, yra plotas stačiakampio, kurio kraštinių ilgiai yra m/n ir k/l.

Teorema. $\frac{m}{n}\times\frac{l}{k}=\frac{ml}{nk}$.

## Trupmenų dalyba

Vadovėlinis aiškinimas. Prieš apibrėžiant trupmenų dalybą, pateikiami pavyzdžiai:

$$8:2=\frac{8}{2}=8\cdot\frac{1}{2}\text{ ir panašiai.}$$

Po to rašoma: „Matome, kad dalybą iš bet kurio skaičiaus galima pakeisti daugyba iš jam atvirkštinio skaičiaus‘‘. Šią frazę seka procedūros formulavimas: „Trupmeną dalydami iš trupmenos, pirmąją trupmeną dauginame iš trupmenos, atvirkštinės antrajai‘‘.

Komentaras. Pateikiant pavyzdžius, naudojama trupmenų dalyba, kuri dar nebuvo apibrėžta. Todėl rėmimasis pavyzdžiu yra nekorektiškas. Be to, nėra dviejų trupmenų dalmens sąvokos apibrėžties. Formuluojama tik procedūra. Trupmenų dalyba niekaip nesiejama su natūraliųjų skaičių dalyba.

Kaip galėtų būti. Paprastai (reiktų surasti pvz.) natūraliųjų skaičių dalyba apibrėžiamas taip: natūralusis skaičius *m* dalo natūralųjį skaičių *n*, jei m ≠ 0 ir egzistuoja toks natūralusis skaičius *k*, kad $n=m\times k$. Natūralusis skaičius *k* vadinamas dalmeniu ir žymimas $n : m$.

**Teorema**. Jei $A$ ir $B$ yra dvi trupmenos ir $B \neq 0$, tai egzistuoja tokia trupmena $C$, kad $A = C \times B$. Be to, tokia trupmena $C$ yra vienintelė.

**Įrodymas**. Tarkime, kad A=m/n ir B=k/l. Tegul C = $\frac{ml}{nk}$ . Ši trupmena apibrėžta korektiškai, nes nk≠0 (B≠0). Remiantis trupmenų daugyba, turime $A = C \times B$. Tarkime, kad C‘ yra kita trupmena, kuriai galioja lygybė $A = C' \times B$, t.y.

$$\frac{m}{n} = C' \times \frac{k}{l}.$$

Padauginę abi šios lygybės puses iš $l/k$, gauname $C' = C$. Teorema įrodyta.

Įrodant teoremą, buvo gauta trupmenos $C$ išraiška. Būtent, jei A=m/n ir B=k/l, tai

$$C = \frac{ml}{nk} = \frac{m}{n} \times \frac{l}{k}.$$

**Apibrėžtis**. Jei $A$ ir $B$ yra dvi trupmenos ir $B \neq 0$, tai vienintelė trupmena $C$, kuriai galioja $A = C \times B$, vadinama dalmeniu gautu $A$ dalinant iš $B$, ir žymima $\frac{A}{B}$ .

Išvada: jei A=m/n ir B=k/l, tai

$$\frac{m/n}{k/l} = \frac{m}{n} \times \frac{l}{k}.$$

## Vikipedia: **„Daugiaaukščių“ trupmenų supaprastinimas**

Kartais gaunamos trupmenos, kurių skaitiklis arba vardiklis yra kita trupmena arba mišrus skaičius (pvz.: $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$ ir $\frac{12\frac{3}{4}}{26}$ ). Norint tokias trupmenas supaprastinti, reikia padalinti skaitiklį iš vardiklio taip, kaip dalijamos ir kitos trupmenos. Pvz.:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

## Vikipedia. **Iracionalaus vardiklio panaikinimas**

Atlikti veiksmus su trupmenomis, kurių vardiklis yra iracionalusis skaičius yra nepatogu, todėl, kai tai įmanoma, jis dažniausiai yra panaikinamas. Jei vardiklis yra vienanaris ir jame yra kvadratinė šaknis, tereikia skaitiklį ir vardiklį padauginti iš tos šaknies:

$$\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

## Apibendrinantys komentarai

Mokyklinėje matematikoje, siekiant kažką  suprasti, galima naudoti bet kurias priemones: paveiksliukus, metaforas, analogijas, konkrečius pavyzdžius. Tačiau galiausiai yra būtina tiksli nagrinėjamos sąvokos apibrėžtis, o procedūros ir veiksmai su objektais turėtų būti pagrįsti atitinkamų sąvokų apibrėžtimis.

Kas yra mokyklinė matematika, jei ji negali būti pilnaverte matematikos dalimi? Reikalinga tokia matematikos žinių pateikimo forma, kuri

1) būtų suprantama nematematikams ir

2) išsaugotų svarbiausią matematikos savybę - samprotavimų loginį tikslumą.

Gal būt tokiai matematikai reikalingas ir kitas pavadinimas, pavyzdžiui, modernioji elementarioji matematika. Wu siūlo tokią matematiką vadinti  matematikos inžinerija.