

Matematikos mokymas – laike įstrigęs pasaulis

Rimas Norvaiša

2012 m. rugpjūčio 10 d. variantas

VU Matematikos ir informatikos institutas
Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius, Lietuva

el. paštas: rimas.norvaisa@mii.vu.lt

Santrauka. Straipsnyje apžvelgiama keletu pasaulio šalių mokyklinės matematikos ugdymo sistemų patirtis ir aptariamos aplinkybės, lemiančios žemą tokios sistemos kokybę Lietuvoje. Argumentuojama, jog šią kokybę sąlygoja dabartinės mokyklinės matematikos turinio atsilikimas nuo šiuolaikinės matematikos. Siekiant pagerinti matematinio ugdymo sistemos kokybę Lietuvoje, siūloma aiškinti visuomenei šiuolaikinės matematikos prasmę ir reikšmę bei keisti matematikos mokytojų ruošimą, sudarant sąlygas tobulinti jų matematinės kultūros ugdymą ir žinių gilinimą. Šis tikslas pasiekiamas kryptingomis ir sutelktomis visos matematikų bendruomenės pastangomis, kartu su matematikos pedagogais ir švietimo politikos ekspertais.

Raktiniai žodžiai: mokyklinė matematika, šiuolaikinė matematika, matematinis mąstymas, matematinio švietimo politika.

Įvadas

Kodėl kiekvienais metais mokyklą baigę jaunuoliai ateina į universitetą neparuošti matematikos studijoms? Atsakymas formuluojamas šio straipsnio pavadinimu, o atsakymas grindžiamas matematikos istorija, matematikos filosofija ir Vidurinio ugdymo bendrosios programos vertinimu. Parodoma, kad problemos vertinimas priklauso nuo šiuolaikinės matematikos prigimties sampratos, matematikos vaidmens mokslo ir kultūros sistemoje supratimo, nuo matematikos istorijos bei matematikos filosofijos žinių. Šis klausimas jau buvo keletą kartų svarstytas Lietuvos matematikų draugijos konferencijose ([3], [4], [17]). Mūsų nuomone, Lietuvoje šiai problemai skiriama aiškiai per mažai dėmesio ir jos ignoravimas prisideda prie mūsų visuomenės bendro intelektualinio nuosmukio.

Priešingai Lietuvai, daugelyje pasaulio šalių aktyviai diskutuojama apie mokyklinės matematikos ugdymo sistemos tobulinimą. Tokias diskusijas dažniausiai inicijuoja matematikų bendruomenės atstovai. Diskusijų rezultatai skiriasi įvairiose šalyse. Pavyzdžiui, Jungtinėse Amerikos Valstijose diskusijos dėl matematikos mokymo programų vadinamos karais dėl reiškiamų emocijų stiprumo ([20]). Panašus karas vyksta Prancūzijoje ([35], [25]). Apie matematikos

mokymo sistemą išsamiai diskutuojama Jungtinėje Karalystėje, ką liudija *Smitho* studija [41]. Netgi Suomijos matematikų bendruomenė reiškia ryškų nepasitenkinimą savo šalies matematikos mokymo sistema ([5], [44]).

Lietuvoje apie matematikos mokymą panašių diskusijų viešai nevyksta, bet tai nereiškia, kad pas mus viskas gerai. Lietuvos ir kitų Europos Sąjungos šalių mokyklinės matematikos mokymo sistemas galima lyginti remiantis Europos Komisijos užsakymu 2011 metais paruošta studija [15]. Šioje studijoje matematikos mokymo kokybė vertinama tikrinant moksleivių gebėjimus spręsti mokymo programoje nurodytus uždavinius (*TIMSSo* apklausa), arba gebėjimus taikyti matematikos metodus sprendžiant realios tikrovės problemas (*PISA* apklausa). Pavyzdžiui, Lietuvos matematikos mokymo sistema (kaip ir Airijos, Graikijos, Ispanijos, Latvijos, Portugalijos ir Rumunijos) 2009 metais *PISA* apklausos įvertinta blogiau už Europos Sąjungos vidurkį ir todėl tobulintina daugeliu atžvilgiu ([15, 17 psl.]). 2009 metais Europos Komisija nusprendė iki 2020 metų pasiekti tokį matematinį raštingumą, kad ne daugiau kaip 15% penkiolikmečių moksleivių žinios būtų prastesnės už antrąjį lygmenį (aukščiausias – šeštasis lygmuo). 2009 metais tik Estija, Suomija ir Lichtenšteinas tenkino minimalaus matematinio raštingumo reikalavimą; Lietuvoje tais metais 26,3% penkiolikamečių moksleivių matematinis raštingumas buvo žemas. Beje, *TIMSSo* vertinimu Lietuvos moksleivių rezultatai yra šiek tiek geresni už vidutinius ES rezultatus, tačiau pačios ES vidurkis yra gerokai žemesnis už kai kurių kitų pasaulio šalių (Kinija, Singapūras, Korėja, Hong Kongas, Japonija) moksleivių rezultatus.

Remiantis *PISA* apklausa, matematikos rezultatus lemia namų aplinka (knygų kiekis, prieiga prie kompiuterio, tėvų išsilavinimas ir kt.). Kiti aukštesnius matematikos pasiekimus lemiantys faktoriai yra teigiamas požiūris į matematiką ir pasitikėjimas savimi mokantis matematikos. Minėti tyrimai požiūrį į matematiką (angl. *attitudes to mathematics*) traktuoja kaip emocinę būseną, kuri apsprendžia mokinio motyvaciją ir rezultatus ([15, 96 psl.]). Savo ruožtu emocinę būseną lemia matematikos „reputacija“ visuomenėje. Kelių kartų susiformavęs požiūris į matematiką kaip į sunkų, sausą ir su gyvenimu nesusijusį mokslą lemia dabartinės jaunosios kartos motyvaciją (jei įmanoma – vengti) mokantis matematikos. Siekiant pakeisti tokį požiūrį, kartais pabandoma matematiką padaryti įdomesnę siejant ją su gyvenimiška veikla, bet tai dažniausiai daroma neįtaigiai ir paviršutiniškai. Europos Komisijos studijos teigimu Lietuvoje nėra nacionalinės strategijos ir iniciatyvos didinti moksleivių motyvaciją mokytis matematikos ([15, 100 psl.]).

Europos Komisijos studija naudoja *TIMSSo* ir *PISA* apklausų rezultatus, kuriuos neoficialiai mokyklinio ugdymo specialistai neretai vertina kritiškai. Pavyzdžiui, Hong Kongo matematiko *S.-Y. Chengo* liudijimu [8, psl. 1690], aukšti rezultatai pasiekiami sutelkiant pastangas išmokyti moksleivius atlikti standartines užduotis, tuo pačiu aukojant jų kūrybiškumą ir motyvaciją studijuoti matematiką. Panašią poziciją Suomijos pirmosios vietos *PISAos* apklausoje atžvilgiu išreiškė tos šalies matematikų bendruomenė, vadindama tai Piro pergale ([44] ir [5]). Kitas kritiškas šių apklausų vertinimas yra 4-oji reformų pamoka, aptarta 2 skyriuje.

Šio teksto 1 skyriuje paaiškinamas atotrūkis tarp šiuolaikinės matematikos ir mokyklinės matematikos ir jo egzistavimo priežastys. Atotrūkio pasireiškimas Lietuvoje detalizuojamas vertinant Vidurinio ugdymo bendrąją programą. 2 skyriuje apžvelgiamos mokyklinės matematikos ugdymo sistemos reformos JAV, Suomijoje ir Rusijoje. 3 skyrius skirtas matematinio mąstymo sampratos aptarimui. Straipsnis baigiamas išvadomis ir rekomendacijomis.

Autorius dėkoja J.J. Mačiui, Vyg. Paulauskui ir A. Zabulioniui už pasiūlimus tobulinant šį tekstą.

1 Atotrūkis tarp šiuolaikinės matematikos ir šiandienės mokyklinės matematikos

19 amžiaus antroje pusėje matematikoje įvyko svarbūs pokyčiai, kurie pakeitė matematikos tyrimų kryptį ir matematikos rezultatų vertinimo kriterijus. Šie pokyčiai prasidėjo matematinėje analizėje atsisakant apeliavimo į intuityją, bei samprotavimų grindžiamų geometriniais vaizdiniais ar realios tikrovės reiškiniais. Juos keitė abstrakčiomis sąvokomis apibūdinami matematikos objektai, bei jų savybių tyrimas naudojant logiką. Naują prasmę įgauna tokios sąvokos kaip funkcija, skaičius, tolydumas, riba ir t.t. Šiuos pokyčius skatino pačios analizės vystymasis sprendžiant jos viduje atsirandančias problemas, pavyzdžiui, kokias funkcijas įmanoma išreikšti *Fourier* eilutėmis.

Matematikos studijos universitete taip pat skatino matematinės analizės loginių pagrindų paieškas. Būtent, *H. Heine*, *Ch. Méray*, *K. Weierstrassas* ir *R. Dedekindas* sukūrė naujas realiųjų skaičių sampratas siekdami savo paskaitas padaryti aiškesnėmis ir logiškai pagrįstomis. „Matematikos išsilaisvinimo nuo gamtos mokslo procesas suteikė papildomą analizės pagrindų reformos poreikio jausmą“ - teigia istorikas *J. Lützenas* [28, 155 psl.]. Toliau jis rašo:

18 amžiaus ir net 19 amžiaus pradžios Prancūzijoje [matematinė] analizė buvo glaudžiai susijusi su teorine fizika. Tai reiškė, kad analizės metodų teisingumą galėjo patvirtinti jų sėkmingas taikymas; konkrečiau kalbant, diferencialinės lygties sprendinio egzistavimas ar eilutės sumuojamumas buvo pagrindžiamas remiantis fizikiniu kontekstu. Tačiau, 19 amžiaus pirmoje pusėje, konkrečiai Vokietijoje, aukštosios mokyklos ir universitetai tapo matematikos studijų ir tyrimų centrais (žr. [16]). Dėl to matematikai, tame tarpe ir analizei, tapo svarbu turėti savo patikimą pagrindą, nepriklausantį nuo taikymų.

Tuo pačiu metu matematinė analizė buvo atskirta ir nuo geometrijos. Realiųjų skaičių aibė ir geometrinė tiesė liko susijusios tik *Cantoro-Dedekindo* aksioma, teigiančia, kad tarp šių matematikos objektų egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis.

Šie pokyčiai formavo naują matematinės tiesos sampratą ir matematinio teisingumo kriterijų: loginį pagrįstumą vietoje gamtos moksluose naudojamo

atitinkamumo realiai tikrovei reikalavimo. Kartais tokia matematika vadinama grynąja (angl. *pure mathematics*), skiriant ją nuo taikomosios arba motyvuotosios matematikos. Grynoji matematika dažniausiai sprendžia problemas kylančias jos pačios vystymosi eigoje. Tačiau tai gali būti ir problemos, kurių motyvacija yra gamtos mokslai. Tokiu pavyzdžiu yra fizikinės M-teorijos matematinis pagrindimas. Dėl tokio šiuolaikinės matematikos pobūdžio matematikos objektas nėra tapatus jokiam realios tikrovės reiškiniu ar daiktu. Iš to išplaukia dažnai ignoruojama aplinkybė, kad matematika tiesiogiai nieko nesako apie realią tikrovę; taikomoji matematika naudoja realios tikrovės matematinį modelį, aiškiai jį skirdama nuo tiriamojo tikrovės reiškinio. Gamtos mokslų reikalas yra eksperimentiškai spręsti realios tikrovės ir matematinio modelio adekvatumą. Laipsniškas matematikos griežtumo standartų vystymasis ir šios tematikos literatūra trumpai apžvelgiami straipsnyje [31].

Tuo tarpu mokyklinė matematika per pastaruosius kelis šimtus metų iš esmės liko nepakitusi. Dar 19 amžiaus gale matematikos mokytojai diskutuodavo apie naujausius to meto matematikos pasiekimus (žr. [32]). Tačiau šiomis dienomis sunku įsivaizduoti mokytojus aptariant, pavyzdžiui, *H. Poincaré* problemą, už kurios sprendimą *G. Perelman*ui 2010 metais buvo skirta vieno milijono dolerių premija (pačią problemą ne matematikams aiškina *V. Uspenskii* savo knygoje [46, 164-260 psl.]). Be abejonės, atotrūkis tarp matematikos ir jos mokymo buvo netrukus pastebėtas ir šiuo metu yra gerai žinomas matematikams. Dar 20 amžiaus pačioje pradžioje *F. Kleinas* rašė [21]:

Nuo pat pradžių jaunas universiteto studentas susiduria su tokiomis problemomis, kurios visiškai nepanašios į mokykloje nagrinėtus dalykus. Natūralu, kad pastaruosius jis užmiršo greitai ir visiškai. ... Baigęs savo studijas ir tapęs mokytoju, staiga jis suvokia, jog iš jo reikalaujama mokytis tradicinę elementariąją matematiką senuoju pedantišku būdu; kadangi jis niekaip negalėjo išvelgti jokio ryšio tarp šios užduoties ir savo universitetinės matematikos patirties, netrukus viskas baigėsi tuo, kad jis toliau tesė laiko išbandytą mokymo būdą, o jo universitetinės studijos liko daugiau ar mažiau malonūs prisiminimai neturintys jokios įtakos jo mokymui.

Trumpai ši aplinkybė išreiškiama fraze „dvigubas trūki“ (angl. *double discontinuity*). Iki šiol yra rašoma apie tokį atotrūkį apibūdinant daugelio šalių nacionalines matematikos mokymo sistemas (pavyzdžiui, [32]). Problemos sunkumą ir mastą rodo vykdomi tarptautiniai projektai. Pavyzdžiui, Tarptautinė matematikos sąjunga (*International Mathematical Union*) ir Matematikos mokymo tarptautinė komisija (*International Commission on Mathematical Instruction*) 2009 metais inicijavo *Felixo Kleino* projektą skirtą padėti matematikos mokytojams įsisavinti šiuolaikinę matematiką (žr. [6]).

Tenka pripažinti, kad matematika žinių sistemoje užima ypatingą vietą savo tyrimo objektu ir tyrimo metodu. Tai, kas įvyko su matematika 19 amžiuje buvo revoliucija. Tačiau, skirtingai nuo gamtos mokslų revoliucijų, matematikoje analogiškas reiškinys liko nepastebėtas. Todėl tenka mokėti didelę kainą dėl

šio neapsižiūrėjimo. Straipsnyje [37] *F. Quinnas* teigia šia kaina esant tai, kad mokyklinė matematika vis dar dėstoma remiantis 19 amžiaus metodologija.

Kaip yra Lietuvoje? Ar pas mus matomas atotrūkis tarp matematikos ir jos mokymo? Vidurinio ugdymo bendrojoje programoje teigiama (žr. [47]), kad „[m]atematika - pasaulio pažinimo instrumentas leidžiantis ugdyti ir ugdytis gebėjimus skaičiuoti, logiškai mąstyti ir formalizuoti, analizuoti, įrodyti, kritiškai vertinti, lavinantis vaizdinį, erdvinį ir stochastinį mąstymą. Žinomų matematikos sąvokų, matematinių modelių, metodų, ryšių įvairioms situacijoms analizuoti supratimas ir taikymas kiekvienam mokiniui sudaro prielaidas ne tik pažinti pasaulį, perimti šimtmečiais susiformavusią mąstymo ir veiklos kultūrą, bet ir padeda jam tiek praktinėje veikloje, tiek kasdieniniame gyvenime.“ Kelia abejones, kad toks matematikos apibūdinimas iš tikro „perima šimtmečiais susiformavusią mąstymo ir veiklos kultūrą.“ Tai svarbu, nes šis matematikos apibūdinimas pagrindžia ugdymo tikslą „...pažinti pasaulį, jį aprašyti matematiniais modeliais, naudoti matematinius metodus sprendžiant įvairių mokslo sričių praktines ir teorines problemas.“ Jei taip, tai kuo ugdymas matematika skiriasi nuo gamtamokslinio ugdymo?

Matematikos vystymosi istorija apima ne šimtmečius, o tūkstantmečius. Dar ketvirtame amžiuje prieš Kristaus gimimą Platonas teigė, kad matematikos objektai egzistuoja savaime, už žmogaus sąmonės ir realios tikrovės ribų. Jo nuomone, žmogaus protas geba suvokti matematikos objektus įgimtos intuicijos dėka. Žmogaus jutimai suvokia tik matematinių objektų išraiškas (reprezentacijas) realioje tikrovėje. Platonas skyrė aritmetiką, dabar sakytume, skaičių teoriją, nuo logistikos, kuri yra praktiniuose reikaluose naudojamos skaičiavimo technikos sritis (žr. [33]). Jo nuomone, aritmetikos studijos įgalina žmogų samprotauti apie abstrakčius skaičius. Tuo pačiu Platonas reišė panieką logistikai, kurioje fiziniai argumentai naudojami „įrodyti“ faktus taikomajame kontekste.

Platono mokinys Aristotelis matematikos žinias laikė tarpine sritimi tarp fizinių ir teologinių žinių. Jo požiūriu, taip yra todėl, kad matematikos objektai – geometrinės figūros, skaičiai, dydžiai – suvokiami dviem būdais: mąstymu ir pojūčiais. Požiūris, kad matematikos objektai suvokiami jutimais, Aristotelį skyrė nuo Platono. Aristotelis matematikos faktus kildino iš empirinės patirties apmąstymo ir loginio samprotavimo, siekiant paaiškinti stebimus reiškinius. Tokiu būdu Platonas ir Aristotelis išreiškė du skirtingus požiūrius į matematikos prigimtį. Apie Platono filosofijos įtaką šiuolaikinei matematikai parašyta nepaprastai daug; čia paminėsime tik vieną latvių matematiko *K. Podniekso* apžvalginį darbą [34].

Apibūdindama matematiką vidurinio ugdymo bendroji programa vadovaujasi Aristotelio požiūriu į matematiką ir ignoruoja Platoną. Tai būtų suprantama, jei būtų kalbama apie kieno nors asmeninę nuomonę. Bet mokyklinio ugdymo kontekste tai atrodo kaip intelektualinė cenzūra. Mokyklinei matematikai skirtoje literatūroje ne kartą rašyta, kad privalu atsižvelgti į matematikos prigimties problemas visuose matematikos pedagogikos lygiuose: programų ir mokytojų ruošime, mokinių ugdyme, visuomenės nuomonės formavime ir t.t.

(žr. [12], [14], [24]).

Šiandienės mokyklinės matematikos atsilikimas nuo šiuolaikinės matematikos aiškiausiai matomas mokymo turinyje. Matematikos vidurinio ugdymo bendroji programa, tiksliau jos išplėstinis kursas (žr. [47]), apima: (1) realiuosius skaičius ir reiškinius; (2) funkcijas, lygtis, nelygybes, sistemas; (3) diferencialinę ir integralinę skaičiavimą; (4) geometriją ir vektorius; (5) tikimybių teoriją ir statistiką. Tai nereiškia, kad vaikai supažindinami su nurodytų sričių pagrindinių sąvokų šiuolaikinėmis sampratomis. Pavyzdžiui, apie iracionaliuosius skaičius pasakoma, kad jie yra begalinės neperiodinės dešimtainės trupmenos, arba „tai, kas nėra racionaliaisiais skaičiais“. Bet, ką reiškia tokia apibrėžtis - nesigilinama. Natūralu, nes tam moksleiviams reikėtų žinoti skaičių eilučių konvergavimą. Tuo tarpu skaičių sekos konvergavimas, kaip ir funkcijos konvergavimas, apibrėžiamas, geriausiu atveju, tik intuityviai. Tokiu būdu, apie realiuosius skaičius moksleiviai iš esmės nežino net to, ką apie juos žinojo flamandų matematikas *Simonas Stevinas* (1548/1549-1620). Panašiai yra ir su kitomis mokyklinės matematikos sąvokomis.

Tuo tarpu 19 amžiuje matematikoje užgimė daug naujų sričių: neeuklidinė geometrija, topologija, šiuolaikinė algebra, algebrinė ir analizinė skaičių teorija, funkcinė analizė, kompleksinio kintamojo funkcijų teorija, matematinė logika ir t.t. Nekalbant jau apie tai, kad mokykloje nagrinėjamos minėtos matematikos sritys įgavo skirtingą prasmę.

Apie tai, kad mokyklinė matematika moksleiviams turėtų perteikti ne tik techninių veiksnių ypatumus, bet ir matematikos esmę pastebi buvusi antrojo kurso VU MIF studentė D. Tiešytė [45]:

[M]okyklinės programos sudarytojai daro siaubingą klaidą - mokykloje visai nereikia žinoti, kodėl yra taip ar kitaip. Jokio paaiškinimo. Jokio bendro vaizdo. Tarkim, išvestinė reikalinga tik tam, kad ją pagal taisykles apskaičiuotum. Tas pats, kaip mokytis kalbos iš atskirų žodžių. Visai suprantama, kodėl mokinukai stebisi, kam reikia tų formulių, juk pinigus mokame suskaičiuoti. Va čia ir yra mokyklos ir universiteto esminis skirtumas. Ir, aišku, sudėtingumas. Tačiau universitetinė matematika man patiko. Gal ne viskas, bet tikrai buvo nuostabių dalykų. Kaip sakė vienas dėstytojas - pažinimo džiaugsmas. Iš tikrųjų labai smagu, kai paaiškėja, kas, kaip ir kodėl. Pasirodo, kad yra tiek gražių dalykų ir jie visi susiję, yra sistema (mokykloje taip neatrodė) ir viskas turi priežastis. Iš pradžių man tikrai buvo keista, bet įdomu - juk visada malonu ką nors naujo atrasti. ... Kai teko išblusinėti kiekvieną teoremą, galutinai sugriuvo mokyklinis matematikos suvokimas ir ėmė ryškėti visai naujas pasaulis.

Tame pačiame straipsnyje publikuojami kitų studentų mokyklinės ir universitetinės matematikos atotrūkio apibūdinimai - nustebimas, šokas, stresas, krizė. Mokyklinės matematikos programos sudarytojams būtų naudinga paskaityti ir kitų studentų atsiliepimus. Juk tie, kurie nestudijuos matematikos universitete, taip niekad ir nesužinos ko neteko.

2 Nacionalinių mokyklinės matematikos ugdymo sistemų reformos ir jų pamokos

Daugumos pasaulio šalių šiandienės mokyklinės matematikos ugdymo sistemos susiklostė vykdant reformas, kurių pradžia siejama su „naująja matematika“ (angl. *new math*) vadinamu judėjimu. Praėjusio šimtmečio šeštame ir septintame dešimtmėčiais vyko svarbūs pokyčiai Vakarų šalių ekonomikoje ir kultūroje. Buvo tikima, kad tolesniam ekonominiam ir kultūriniam vystymuisi būtini aukštos kvalifikacijos darbuotojai ir mokslininkai. Kitas svarbus faktorius buvo konkurencija su tuometine Sovietų Sąjunga, kuri 1957 m. spalio 4 d. į kosminę erdvę sėkmingai paleido dirbtinį žemės palydovą. Baimė tapti technologškai ir kariniu atžvilgiu atsilikusiomis valstybėmis paskatino jas peržiūrėti matematikos ir gamtos mokslų mokymą.

Antru svarbiu reformas paskatinusiu faktoriumi buvo pačios matematikos evoliucija. Grupė prancūzų matematikų, pasivadavusi *N. Bourbaki* slapyvardžiu, sugebėjo suvienyti atskiras matematikos sritis aibių teorijos pagrindu bei išplėtoti aksiomatinį metodą. Tai padėjo susiformuoti požiūriui į matematiką kaip į mokslo kalbą. Buvo tikima, kad matematika yra reikalinga visose srityse.

Trečias „naujosios matematikos“ judėjimo atsiradimo faktorius buvo pokyčiai pedagogikoje susiję su šveicarų psichologo *J. Piaget* darbais. Jis išvelgė analogiją tarp skaičiaus sąvokos formavimosi mechanizmo vaiko sąmonėje ir matematinių struktūrų. Be to, *Piaget* akcentavo aktyvų mokymosi būdą, o *N. Bourbaki* stiliaus matematika atrodė labai tam tinkama.

Tiesioginis matematikos mokymo programų reformų pradžią lėmęs įvykis buvo 1959 metais OECD (*Organization for Economic Cooperation and Development*) organizuotas seminaras *Cercle Culturel de Royaumont*, Prancūzijoje (žr. [19] ir ten nurodytą bibliografiją). Matematikos programų pokyčiams vadovavo buvęs *N. Bourbaki* narys *J. Dieudonné*; savo požiūrį radikaliai keisti mokyklinės matematikos programas jis išreiškė lozungais „Šalin kartu su Euklidu! Mirtis trikampiams!“ (pranc. *À bas Euclide! Mort aux triangles!*). Teisybės dėlei reikėtų pastebėti, jog *N. Bourbaki* grupė tiesiogiai nedalyvavo „naujosios matematikos“ judėjime. Šios grupės tikslu buvo aukštesnių kursų universitetinės matematikos turinio modernizavimas (žr. [30, 10 skyrius]).

Po *Royaumonto* seminaro, „naujosios matematikos“ judėjimas išplito daugumoje OECD organizacijos narių ir kitose pasaulio šalyse (žr. [19]).

JAV Apie 1960 metus Amerikos mokyklose pradėta mokyti aibių teorija pagrįsta matematika. Nepraėjus ir dešimtmečiui sukilo reformoms prieštaraujanti kai kurių matematikų, mokytojų ir tėvų banga. Skelbiamos pasekmės apie moksleivių nesugebėjimą įsisavinti ne tik abstrakčias sąvokas, bet nesugebėjimą atlikti ir elementarius aritmetikos veiksmus. Tokia reakcija matyt buvo pagrįsta, nes pakeitus programas nebuvo pasirūpinta mokytojų kvalifikacijos kėlimu, naujų vadovėlių rašimu ir „naujosios matematikos“ populiarinimu visuomenėje.

Nusivylimas „naujosios matematikos“ diegimo mokyklose rezultatais pastūmėjo reformų švytuoklę į priešingą pusę. Apie 1970 metus grįžtama „atgal prie pa-

grindų“ (angl. *back to basics*), kas turėjo užtikrinti aukštesnio lygio matematinį gebėjimų įsisavinimą. Tuo metu matematinis ugdymas kėlė sau uždavinių išmokyti vaikus svarbiausių matematinių įgūdžių, akcentuojant matematinių veiksmų atlikimo automatizmą. Dėl to nebuvo siekiama ugdyti moksleivių mąstymą ir uždavinių sprendimo gebėjimus.

Apie 1980 metus reformų švytuoklė pasuko dar kita kryptimi, siekiant ugdyti matematikos uždavinių sprendimo gebėjimus; šis judėjimas pavadintas „uždavinių sprendimu“ (angl. *problem solving*). JAV Matematikos mokytojų nacionalinė taryba (pagrindinė matematikos mokytojų ir jų ruošėjų profesinė organizacija) skelbė, jog mokyklinės matematikos tikslas yra uždavinių sprendimas (*NCTM, Agenda for Action 1980*, pusl. 1). Šis tikslas deklaruojamas iki šiol. Tačiau diskusijos matematikos mokymo klausimais nesumažėjo. Naujasis laikotarpis, besitęsiantis iki šiol, vadinamas „matematikos karais“ (angl. *the math wars*; žr. [48], [39], [43]).

„Matematikos karų“ laikotarpiu diskusijų objektas yra matematikos programa, joje formuluojami matematikos mokymo standartai. Šių diskusijų potekstė ir kilmė yra nesutarimas dėl to, kiek mokyklinė matematika turi panašėti į akademinę matematiką. Tai atspindi ir nesutarimai dėl matematikos ugdymo tikslų. Apibendrinant galima sakyti, kad diskusijos vyksta tarp matematikų bendruomenės ir matematikos pedagogų bendruomenės. Po 1990 metų į matematikos ugdymo tikslų ir metodų diskusijų ratą įtraukiama kognityvji psichologija, matematikos filosofija, sociologija, kultūrologija, antropologija ir kiti mokslai. Su jų pagalba tiriamos matematikos prigimties, matematinio mąstymo, matematikos supratimo ir kitos problemos.

Nors diskusijos užsimezgė Kalifornijos valstijoje, bet jos vyksta visoje Amerikoje ir už jos ribų. 2006 metais Madride vykusiam Tarptautiniame matematikų kongrese buvo organizuotas apskritas stalas, kurio pagrindiniu klausimu buvo matematikų vaidmuo dalyvaujant mokyklinės matematikos ugdyme (žr. [8]). Diskusijoje buvo pasidalinta patirtimi vystant ne tik JAV matematinio ugdymo sistemą, bet ir Honkongo bei Šveicarijos sistemas.

Nors čia aptarėme tik JAV matematinio ugdymo reformų peripetijas, bet daugelis jos niuansų kartojosi kitose šalyse. Mūsų nuomone, ši patirtis labai svarbi Lietuvai, nes pas mus galima įžvelgti panašias problemas. Toliau pateikiamos *J. Kilpatrick* suformuluotos JAV vykusių reformų pamokos (žr. [18]):

- 1 *Kiekviena švietimo reforma yra lokali.* Nors skirtingų šalių mokyklinės programos turi daug bendro, bet realūs reformos pokyčiai vyksta tik klasėje, jei siūlomus pokyčius supranta ir jiems pritaria mokytojai ir mokiniai. Kiekvienos šalies mokykla yra savos istorijos, kultūros ir tradicijų padarinys apsprendžiantis matematinio švietimo suvokimą. Lygšiolinių reformų patirtis rodo: kuo labiau matematikos mokymas tampa tarptautiniu, tuo ryškiau matoma nacionalinių ypatybių svarba ([19]).
- 2 *Matematinis mąstymas neperduodamas vadovėliais.* Dauguma „naujosios matematikos“ reformos projektų buvo bandoma realizuoti rašant naujus matematikos vadovėlius ir atitinkamai instruktuojant privačias leidyklas.

Vadovėliuose buvo pateikiamos užduotys ir jų sprendimo schemas tikint, kad nuosekliam užduočių aiškinimo ir sprendimo procesui vadovaus mokytojai. Tačiau mokytojams nesuprantant naujų idėjų, jos paprasčiausiai buvo ignoruojamos, arba reikalaujama detalių instrukcijų.

- 3 *Lengviau keisti mokytojų žinias negu jų mokymo įpročius.* Rūpinantis naujų matematikos programų ruošimu, dažniausiai pamiršamas mokytojų tobulinimo(si) būtinumas neskiriant tam pakankamai dėmesio. Reformų vykdytojais dažniausiai ignoruoja mokytojų darbo sąlygas. Net ir tais atvejais, kai mokytojai supranta kaip geriau mokyti vaikus, jie to nedaro, nes tokia veikla yra rizikinga, nepalaikoma ir neskatinama.
- 4 *Jei norite, galite lyginti obuolius ir apelsinus, bet ne pagal tai, dėl ko jie yra vertinami.* Skirtingos mokyklinio lavinimo programos dažniausiai turi skirtingų gebėjimų ugdymo tikslus. Palyginti tokias programas įmanoma tik bendrų tikslų atžvilgiu. Į tai neatsižvelgiama kai matematikos užduoties atlikimo rezultatas naudojamas vertinti skirtingas programas ir netgi skirtingų šalių mokymo sistemų efektyvumą.
- 5 *Matematikos mokymas yra žymiai sudėtingesnis nei jūs manote, net ir tuo atveju, kai manote matematikos mokymą esant sudėtingesniu nei manote.* Matematinio švietimo reforma nėra techninė problema kaip, pavyzdžiui, žmogaus nuskraidinimas į mėnulį. Matematikos mokymas yra žmogaus ir visuomenės supratimo problema.

2010 metų birželio mėnesį paruošti ir priimti nauji matematikos mokymo standartai (ang. *The Common Core State Standards for Mathematics*). Šia programa siekiama matematikos mokymo aiškumo ir tikslumo, bei loginio nuoseklumo tarp atskirų temų ir pereinant iš vienos klasės į kitą. Naujajai programai pritarė dauguma valstijų ir ji bus pradėta įgyvendinti 2014 metais.

Suomija Ši šalis garsi savo mokytojų aukšta kvalifikacija. Tam, kad įgyti mokytojo kvalifikaciją, būtinos universitetinės studijos truncančios nuo 5 iki 7 metų. Savo ruožtu, mokytojų atranka griežta. Pavyzdžiui, 2010 metais iš 32700 gimnaziją baigusiu moksleivių tik 18% įstojo į universitetą; tarp šių 18% yra ir būsiami mokytojai.

Nuo 1970 metų Suomijoje vyko trys svarbūs mokyklinės matematikos programos pertvarkos. Pirmąją pertvarką paskatino „naujosios matematiko“ judėjimas JAV. Jos metu vyko daug diskusijų bet atlikta mažai pakeitimų. Antroji pertvarka, kaip ir JAV, buvo pavadinta „atgal prie pagrindų“. Paskutinė ir svarbiausia pertvarka vyko, be abejo, su šūkiu „uždavinių sprendimas“. Ši pertvarka turėjo didžiausią poveikį ir buvo vykdoma vadovaujantis nuostata, kad svarbiausia yra matematikos taikymai, o pati matematika yra mažai svarbi. *O. Martio* teigimu (žr. [29]), matematikos programos pertvarkos turėjo šias pasekmes: mokyklinė matematika tapo aprašomąja, atsisakyta tikslų apibrėžčių ir įrodymų; geometrija buvo apleista; skaičiavimai atliekami naudojant skaičiuoklę ir nesigilinant į skaičiavimo pagrindus. Šiuos teiginius papil-

do virš 200 matematikos mokytojų ir dėstytojų pasirašyta peticija dėl Suomijos užimamos pirmosios vietos *PISA* apklausose. Jų teigimu (žr. [5]), *PISA* apklausa vertina tik gebėjimus atitinkančius kasdieniniame gyvenime naudojamą matematiką, vadinant tai „matematinio raštingumu“. Tačiau nevertinami gilesni matematiniai gebėjimai, tokie kaip: veiksmų su trupmenomis atlikimas, paprasčiausių lygčių sprendimas, geometrijos teiginių supratimas, veiksmai su algebrinėmis išraiškomis ir panašiai. Nenuostabu, kad *TIMSS*o apžvalgoje Suomijos moksleivių geometrijos ir algebros žinios įvertintos vieta esančia žemiau vidurkio.

Rusija (SSRS) Po 1960 metų buvusioje Sovietų Sąjungoje taip pat vyko mokyklinės matematikos reformos, kuriomis buvo siekiama mažinti atotrūkį tarp mokyklinės matematikos ir šiuolaikinės matematikos. Šios reformos paprastai siejamos su vieno žmogaus veikla. Būtent, teigiama *A. Kolmogorovą* buvus reformų įkvėpėju ir jų aktyviu dalyviu (žr. [1]). Pastaruoju metu publikuojamai istoriniai faktai verčia abejoti šio požiūrio teisingumu (žr. [23]).

1962 metų pabaigoje laikraštyje *Izvestiya*, atsakydamas į klausimą apie savo planus, *Kolmogorovas* rašė: *Tačiau pabandyčiau trumpai nusakyti savo senas svajones:*

- 1 *išdėstyti bendrus loginius matematikos pagrindus tokiu būdu, kad juos galėtų suprasti keturiolikos ir penkiolikos metų amžiaus jaunuoliai;*
- 2 *panaikinti skirtumą tarp grynosios matematikos „griežtųjų“ metodų ir sveikojo proto „negriežtųjų metodų“, kuriuos naudoja taikymais besirūpinantys matematikai, fizikai ir inžinieriai.*

A. Abramovo teigimu, pirmoji *Kolmogorovo* plano dalis buvo realizuota reformos eigoje (žr. [1, 93 psl.]). Tai buvo įmanoma pasiekti apeinant tuo metu galiojusį ideologinį suvaržymą „išsilavinimas visiems vienodas“ ir leidžiant moksleiviams patiems rinktis mokytis taip vadinamose „sustiprintose klasėse“. Tam tikslui, dar iki 1970 metų, matematikos mokymo programa buvo papildyta specialiais skyreliais ir išleisti pirmieji vadovėliai skirti „sustiprintoms klasėms“. Tokių klasių veiklą ribojo kvalifikuotų mokytojų trūkumas. 1990-ųjų metų pradžioje „sustiprintos klasės“ nustojo egzistavusios.

Mūsų nuomone, ypatingas dėmesys kreipiamas į apibrėžimų griežtumą buvo labai svarbi naujųjų matematikos vadovėlių savybė. *A. Abramovas* rašo (žr. [2, 115 psl.]):

[Kolmogorovas] tikėjo, kad gebėjimas naudotis tiksliais apibrėžtimis yra absoliučiai privalomas kiekvienam išsilavinusiam asmeniui. Dėl kai kurių įrodymų sudėtingumo ne kiekvienas mokyklinio vadovėlio teiginys yra pilnai įrodomas; tačiau, tokiais atvejais yra svarbu aiškiai nurodyti „neįrodytą tvirtinimą“, kurio prasmę reikia įtikinamai paaiškinti. Tačiau, apibrėžčių atveju ir formuluojant teiginius, turi būti laikomasi tikslumo ir aiškumo.

Mokyklinės matematikos reformos Sovietų Sąjungoje turėjo ir savo specifinę savybę: šiose reformose labai aktyviai dalyvavo mokslininkai matematikai (žr. [42]). Dabartinės Rusijos mokyklinės matematikos sistemą ir jos problemas apžvelgia *M. Bashmakovas* (žr. [7]). Kritiškai aštuntojo dešimtmečio reformą vertina *I.P. Kostenko*. Jis teigia (žr. [22]) šią reformą buvus anti-pedagogiška, neatsižvelgiančia į moksleivio galimybes ir siūlo grįžti prie garsaus matematikos pedagogo *A.P. Kiseliovo* vadovėlių.

Mūsų nuomone, neįmanoma nukopijuoti ar kitaip perkelti kitų šalių ugdymo sistemų. Tačiau, minėtos išvados labai aktualios Lietuvos švietimo reformai, ir ne tik matematikos mokymo. Ignoruodami sukauptą patirtį ir eidami lengviausiu keliu mes nesimokome iš jau padarytų ir įsisąmonintų klaidų.

Kaip yra Lietuvoje? Kokios matematinio ugdymo reformos vyksta Lietuvoje? Matematinio ugdymo raida Lietuvoje po 1991 metų nušviečiama V. Sičiūnienės knygoje [40], todėl čia smulkiau nekomentuojame. Šioje knygoje ([40, 22 psl.]) matematikos mokymo kaita vadinama „grėsmingai besiklostančia situacija“, ir pastebima, kad „įvairios matematikų bendruomenės grupės mokykloje vykstančius pokyčius matė ir vertino iš skirtingų perspektyvų“. Nepaisant to, išskyrus Lietuvos matematikų draugijos konferencijas, viešojoje erdvėje randame labai mažai išsamių komentarų mokyklinės matematikos ugdymo reformų klausimais.

Šio teksto autoriaus žinios mokyklinės matematikos mokymo reformų eigos ir organizavimo klausimais yra kol kas labai skurdžios. Apie reformas galima spręsti tik pagal Švietimo ir mokslo ministerijos pranešimus ir dokumentus (aptariamus kitame skyriuje), bei netiesiogiai, remiantis esama matematikos mokymo būkle. Mes neturime leidinio, kuriame būtų galima svarstyti šiuos klausimus. Gaila, bet V. Stakėno readaguojamas matematikų bendruomenei skirtas ir matematikos mokytojams ypač aktualus žurnalas „Alfa plus omega“ nustojo gyvavęs dar 2003 metais.

3 Matematinis mąstymas

Matematinio ugdymo metodologija priklauso nuo požiūrio į matematinį mąstymą. Ar matematinis mąstymas yra sveikojo proto apraiška, ar tai yra iš principo skirtingos rūšies mąstymas? *U. Leronas* į šį klausimą atsako remdamasis evoliucinėje psichologijoje atliktų žmogaus prigimties tyrimų rezultatais (žr. [27]). Tam tikslui jis skiria tris matematinio mąstymo lygius:

- 1 *Rudimentinė aritmetika*, kurią sudaro tokie žmogaus gebėjimai, kaip momentinis skaičiaus suvokimas (angl. *subitizing*), konkrečių objektų mažų rinkinių dydžių vertinimas, lyginimas kiekio atžvilgiu ir panašiai. Teigiama, kad šie gebėjimai, panašiai kaip spalvos pojūtis, yra smegenų savybė (angl. *hard-wired*) egzistuojanti naujagimiuose ir atsiradusi ilgo evoliucinio vystymosi eigoje.

- 2 *Neformalioji matematika* yra tai, kas paprastai perteikiama mokykloje netiksliai kalbant apie matematiką. Teigiama, kad šio lygmens mąstymo gebėjimai taip pat atsirado evoliucijos eigoje ir yra būdingi žmogui apytikriai pastaruosius 25 amžius, panašiai kaip kalba ir visuomeninis bendravimas. Konkretūs neformaliosios matematikos susidarymo mechanizmai aptariami *G. Lakoffo* ir *R. Núñezo* ([26]), bei *K. Devlino* ([11]) knygoje.
- 3 *Formalioji matematika* yra grynosios matematikos abstrakčioji loginė forma su kuria paprastai susipažįstama universitetinės matematikos kurse. *Leronas* argumentuoja (žr. [27]), kad šio lygmens matematinis mąstymas nėra sveiką proto apraiška ir kartais jam prieštarauja, aptardamas konkrečius tai iliustruojančius matematikos faktus.

Pasirenkant matematinio ugdymo tikslus ir priemones, tiek mokyklinės, tiek ir universitetinės matematikos kontekste, turėtų būti atsižvelgiama į matematinio mąstymo lygius. Be to, skirtumas tarp antrojo ir trečiojo mąstymo lygių paaiškina priežastis dėl kurių pirmo kurso studentai susiduria su dideliais sunkumais įsisavinant universitetinės matematikos kursą. Jei mokyklinis kursas neparuošia žmogaus abstrakčiam mąstymui, tai universitetinį matematikos kursą gali įsisavinti didelių pastangų dėka tik labai gabūs studentai. Tuo atveju visų kitų mokslų studentai, kokie gabūs jie būtų, paprastai netenka galimybės net sužinoti jog yra kitokia nei mokyklinė matematika, būtent šiuolaikinė matematika atsiradusi po 19 amžiaus.

Daugumai žmonių žinoma, kad matematika disciplinuoja mąstymą, o abstrakčių objektų tyrimas lavina vaizduotę. Tačiau tas žinojimas yra paviršutiniškas, o matematinis mąstymas nesiejamas su aukštosios kultūros vertybėmis. Matematikas ir lingvistas *V. Uspenskii* savo straipsnyje „Matematinis ir humanitarinis: barjerų įveikimas“ ([46] rinkinyje) atskleidžia visuomenei mažiau žinomas matematinio mąstymo savybes. Būtent, autorius aptaria matematiko gebėjimus skirti: (1) teisingą nuo neteisingo; (2) prasmingą nuo beprasmių; (3) suprantamą nuo nesuprantamo. Šias savybes lygina su humanitariniu mąstymu, parodydamas kokią naudą galėtume turėti, jei skatintume matematikų ir humanitarų bendravimą.

Tolesniam aptarimui sukonkretinsime apibūdinimą matematikos, kuri yra studijuojama universitete ir kuriai yra būtinas aukščiau minėtas trečiojo lygio matematinis mąstymas. Šiuolaikinė matematika yra žinių sistema apie abstrakčias (matematines) sąvokas ir jų sąryšius. Matematinio tyrimo objektas apibrėžiamas tik jam priskiriamomis savybėmis, naudojant aksiomas ar apibrėžimus. Tai reiškia, kad matematinis objektas turi lygiai tiek savybių, kiek jam suteikia apibrėžtis ir su juo elgiamasi tik taip, kaip leidžia logikos taisyklės. Matematiniai samprotavimai reiškiami teiginiais, kurie yra teisingi arba klaidingi; trečiojo atvejo nėra. Dėl šios priežasties šiuolaikinėje matematikoje yra įmanoma naudoti teiginių logikos *negalimo trečiojo dėsnį*. Tik tokiam kontekste yra galimi matematiniai samprotavimai vadinami *įrodymais*. Kitokiame kontekste, pavyzdžiui natūraliosios kalbos kontekste, žodis „įrodymas“ suprantamas skirtingai ir labai įvairiai (žr. Lietuvių kalbos žodyną).

Šiuolaikinės matematikos apibūdinimas labai svarbus kalbant apie mokyklinę matematiką, nes jis turėtų būti orientyru mokyklinei matematikai. Matematiniam mąstymui ugdyti reikia formuoti naują intuicijos tipą, kuris skiriasi nuo kasdieninės veiklos suformuotos intuicijos. Kuo anksčiau pradedama tai daryti, tuo lengviau pasiekti teigiamų rezultatų (bent jau taip teigiama [13] ir [9]). Be abejo, ne visi žmonės vienodai greitai gali pasiekti teigiamų rezultatų, o kai kurie gal būt niekada. Manome, kad dabartinės mokyklinės matematikos metodikos trūkumu yra tai, kad ji visai nesiekia formuoti trečiojo lygio matematinį mąstymą (pagal minėtąją *U. Leron*o klasifikaciją). Geriausiu atveju ugdomi mechaniniai įgūdžiai atlikti tam tikrus veiksmus su matematiniais reiškiniais, paaškinant juos realaus pasaulio pavyzdžiais.

Šiuolaikinės matematikos prigimtis suvokiama įvairiai. Šiandienėje mokykloje matematika pristatoma kaip absoliučiai tikrų žinių sritis, kaip mokslas kuriame tai, kas jau buvo atrasta yra nekintama visiems laikams. Šis požiūris būdingas mūsų visuomenei ir jis daro didelę įtaką matematikos ugdymo sistemai ir nustatant matematikos mokymo tikslus. Kitu požiūriu matematika yra sąvokų sampratos evoliucija, nuolat kintanti ir pradines prielaidas peržiūrinti žinių sistema. Bent kiek tikslesni matematikos apibūdinimai yra sudėtingi. Neabejotinai sutariama dėl to, kad matematikos prigimties aiškinimasis turi svarbią reikšmę matematikos ugdymui ([12]).

Iš to, kas pasakyta, ryškėja, jog svarbiausia problema yra nuspręsti kokią matematiką ir kaip jos mokytį mokykloje, kad mokiniai susipažintų su šiuolaikine matematika. Prieš tai reikia apsispręsti dėl matematikos mokymo tikslų atsižvelgiant į tai, kad Lietuvoje garantuojamas visuotinis vidurinis ugdymas. Čia tenka derinti du dalykus: gebėjimų ribotumą ir matematikos turinį. Tikslas – numatyti tokį matematikos mokymo turinį, kad nebūtų prasizengta matematikos griežtumo reikalavimams ir atsižvelgta į jauno žmogaus psichologiją.

Sprendžiant šias problemas, reikėtų pagrindinėms šiuolaikinės matematikos sritims suteikti tokią formą, kuri būtų prieinama viduriniam ugdymui ir visuomenės lavinimui. Matematikas *F. Quinnas* siūlo spręsti šias problemas moksliniu būdu: nuo empirinių faktų prie jų apibendrinimų. Kitaip tariant, jis bando nagrinėti studentų reakciją sprendžiant įvairius matematikos uždavinius. Straipsnyje [36] *F. Quinnas* siūlo tokius matematikos mokymo(si) metodologijos principus: apibrėžimų ir samprotavimų tikslumas; matematinio teiginio įrodymo idėjos supratimas ir jos taisyklingumo supratimas; matematinio modelio sampratos laikymasis žodiniuose uždaviniuose. Tai galima iliustruoti trupmenos sąvoka, kuri mokykloje dažnai apibrėžiama remiantis keliais pavyzdžiais iš realaus pasaulio. Trupmenos apibrėžtis turėtų būti tokia iš kurios išplaukia visos jos savybės, ir ne daugiau. Pavyzdžiui, skaičius x išreiškiamas trupmena a/b , jei $bx = a$. Šioje apibrėžtyje trupmena yra matematinio objekto (skaičiaus) vardas. Be abejonės, mokiniui nebūtina suprasti skirtumo tarp objekto ir jo vardo, bet mokytojui reikėtų tai suprasti ir naudoti taisyklingą formulavimą. Kitas matematikas *H.-H. Wu*, kalbėdamas apie minėtų problemų sprendimą [8, psl. 1678], siūlo naują kokybę turinčią sritį vadinti „matematikos inžinerija“.

Kaip yra Lietuvoje? Kaip matematinis mąstymas suprantamas mūsų matematinio ugdymo dokumentuose ir kaip jis formuojamas mūsų matematikos vadovėliuose? Vidurinio ugdymo bendrojoje programoje [47] matematinis mąstymas yra viena iš matematinės kompetencijos struktūros dalių greta žinių ir supratimo, matematinio komunikavimo, matematikos taikymų, problemų sprendimo ir mokėjimo mokytis. Toliau dokumente teigiama, kad matematinį mąstymą mokiniai parodo (žr. [47, 4.7.4.1 - 4.7.4.6]):

- 1 *keldami hipotezes probleminėse situacijose ir jas tikrindami;*
- 2 *analizuodami problemą, uždavinį suskaido į lengviau įveikiamas, geriau išnagrinėtas dalis;*
- 3 *nustatydami objektų bei reiškinių sąryšius ir dėsningumus;*
- 4 *įrodydami teiginių teisingumą;*
- 5 *darydami tiksliai logines išvadas, jas pagrįsdami, argumentuodami, apibendrindami;*
- 6 *demonstruodami matematinų idėjų originalumą. [sic]*

Vertinant šias matematinį mąstymą apibūdinančias savybes, nesunku pastebėti, kad pirmosios trys ir penktoji yra įprastiniai gamtamoksliniai principai; juos iš esmės suformulavo *F. Baconas* (1561-1626) ir *R. Descartesas* (1596-1650) [10]. Ketvirtoji savybė (gebėjimas įrodyti) nerealizuojama, nes moksleiviai nėra supažindinami su tiksliais matematikos sąvokų apibrėžtimis ir logikos elementais. Rašant šį tekstą, mums dar nepavyko suprasti šeštosios matematinio mąstymo savybės mokyklinės matematikos kontekste. Jei toks matematinio mąstymo ugdymas realizuojamas mokykloje, tai jis vadintinas 17-o amžiaus gamtamoksliniu mąstymu. Tai dar kartą rodo, kad, pagal vidurinio ugdymo bendrąją programą, mūsų mokyklinė matematika yra laike įstrigęs pasaulis.

Kaip ir pirmame šio teksto skyriuje, pastaroji išvada darytina atsižvelgiant į matematikos mokymo turinį. Visi vidurinio ugdymo bendrojoje programoje formuluojami ir vadovėliuose dėstomi matematikos faktai buvo žinomi dar 18 amžiuje. Tokios šiuolaikinės matematikos sąvokos, kaip funkcija, begalinė aibė ir riba, jei apibrėžiamos, tai iš esmės nenaudojamos, arba naudojamos nepaisant nuoseklumo. Pavyzdžiui, funkcija dažniausiai apibrėžiama kaip tam tikra taisyklė, siejanti dviejų aibių elementus. Bet toliau funkcija naudojama kaip „priklausomas kintamasis“, tam tikra taisykle susietas su „nepriklausomu kintamuoju“. Netgi pačioje vidurinio ugdymo bendrojoje programoje, funkcijai suteikus šiuolaikinę prasmę, toliau naudojamos frazės „funkcijos reikšmių kitimo greitis“ ([47, 8 psl., 3.1.1 punktas]) ir „funkcijos kitimo greitis“ ([47, 17 psl., 3.1.1 punktas]). Nenuostabu, kad reiškinio arba išraiškos sąvoka, iš esmės esanti *L. Eulerio* laikų funkcijos samprata, yra dažnai naudojama mokykliniuose matematikos vadovėliuose. Kaip taisyklė (nepaisant matematikų prieštaravimo, [2]), ribos apibrėžtis nepateikiama vadovėliuose, tuo nubraukiant galimybę tiksliau paaiškinti išvestinę ir integralą 19 amžiaus matematikos kontekste. Matematinio

griežtumo svyruoklė dabar randasi priešingoje fazėje, nei prieš 20-30 metų, kai mokėmės A. Kolmogorov'o reformų įtakoje.

Galima būtų galvoti, kad mokykla yra ne ta vieta, kur kalbama apie šiuolaikinį mokslą. Bet fizikos Vidurinio ugdymo bendroji programa rodo ką kitą. Pagal šią programą fizikos mokymo tikslas – „nuodugniau nagrinėti klasikinės ir moderniosios fizikos sritis“. Pastarąją sritį sudaro šviesos kvantinės savybės, atomo sandara ir branduolinė reakcija – svarbiausi 20-ojo amžiaus fizikos atradimai. Vienas iš fizikos mokymo uždavinių – „pasirengti studijoms aukštojoje mokykloje“. Tarp mokinių pasiekimų fizikos srityje yra reikalavimas „nusakyti Lietuvos mokslininkų vaidmenį fizikos raidoje“ ir „nusakyti fizikos ateities perspektyvas“. Matematikai gali tik svajoti apie analogišką programą matematikai mokykloje.

Dėl mokyklinės matematikos turinio ribotumo neįmanoma paaiškinti ir svarbiausių fizikos sąvokų. Pavyzdžiui, momentinio greičio tiksli samprata lieka nežinoma jaunuoliui baigusiam eilinę Lietuvos mokyklą; išskyrus gal būt tam jaunuoliui, kuris baigė specialią mokyklą, arba turėjo ypatingą matematikos mokytoją. Kadangi mokyklinėje matematikoje nėra formuluojama tiksli ribos prasmė, funkcijos išvestinė taške gali būti paaiškinama tik rankų mosavimu arba liestinės krypties koeficientu. Kai kur, kad dar labiau supainioti moksleivį, lygia greta kalbama dar ir apie minėtąją „funkcijos kitimo greitį“. Skirtingai nuo aukštosios mokyklos, vidurinėje mokykloje nėra užsimenama apie matematinės sąvokos interpretaciją, ar, tuo labiau, apie matematinio modelio prasmę. Tai suprantama, nes matematikos sąvokos mokykloje neatskiriamos nuo fizikinės tikrovės. Pavyzdžiui, apibrėžiant trupmeną, pakanka virtuvinės patirties, nes trupmenos apibrėžtis pradedama nuo picos dalių, pereinant prie kitų buitinių reikmenų nagrinėjimo, nepasiekiant abstrakčios sąvokos lygio. Tai reiškia, kad matematiniam modeliui aiškinti mokyklinėje matematikoje nelieka vietos ir prasmės, nors ši frazė naudojama labai dažnai.

Natūralu, kad absoliuti dauguma matematikos vadovėlių parašyti vadovaujantis Vidurinio ugdymo bendrąja programa ir matematikos sąvokas siejant tik su realia tikrove. Tačiau teko vartyti vadovėlį, kuriame, pagal galimybes, atsižvelgta į šiuolaikinės matematikos pobūdį, ir dauguma matematikos sąvokų yra apibrėžiamos atsiribojant nuo jutiminės patirties. Tai 11-12 klasėms skirti vadovėliai, parašyti matematiko V. Stakėno vadovaujamo autorių kolektyvo. Kiek mums žinoma, šie vadovėliai nėra mokytojų plačiai naudojami. Viena iš priežasčių, matyt, yra ta, kad nėra panašaus pobūdžio vadovėlių žemesnių klasių moksleiviams. Dėl to, puikus darbas lieka sunkiai panaudojamas.

4 Išvados ir rekomendacijos

Bandant spręsti pagrindinę straipsnyje keliamą problemą, pirmiausia reikia susitarti dėl mokyklinės matematikos mokymo tikslų. Mūsų rekomendacija:

vidurinio ugdymo bendrojoje programoje atsisakyti požiūrio į matematiką kaip pasaulio pažinimo instrumentą ir atsigręžti į matematiką kaip kultūros ir mokslo sritį jos istorinio vystymosi kontekste.

Tai reiškia, kad mokyklinės matematikos programa turėtų atspindėti šiuolaikinės matematikos esmę samprotavimų griežtumo prasme ir atskleisti matematikos faktų svarbą intelektualinės kultūros kontekste ir sąryšyje su kitais mokslais. Tai yra būtina sąlyga skatinant moksleivių *motyvaciją* mokytis matematikos. Atsižvelgiant į šiuo pokyčius reikėtų tobulinti nacionalinį mokinių pasiekimų tyrimą matematikos srityje.

Pastangos ruošti kokybiškas mokymo programas ir naujus vadovėlius gali tapti bergėdziomis, jei nebus mokytojų, sugebančių jais naudotis. Todėl ne mažiau svarbi yra antra rekomendacija.

Skatinti matematikos mokytojus tobulinti savo dalykinę kvalifikaciją ir sudaryti tam sąlygas. Keisti matematikos mokytojų rengimą skiriant didesnę vaidmenį jų dalykinei kvalifikacijai.

Matematikos mokytojų kokybiškas ruošimas turėtų būti prioritetu keičiant dabartinę matematikos ugdymo sistemą. Matematikos magistro kurso baigimas galėtų tapti privalomu vyresniųjų klasių matematikos mokytojams.

Be visuomenės supratimo ir palaikymo neįmanoma pakeisti dabartinės matematinio ugdymo sistemos. Tai lemia trečiąją rekomendaciją.

Skatinti matematikų bendruomenę imtis matematikos populiarinimo veiklos rašant originalius straipsnius ir knygas bei skaitant viešąsias paskaitas.

Matematikos populiarinimas yra priemonė padėti visuomenei suvokti, kas yra šiuolaikinė matematika ir koks yra jos vaidmuo kultūroje.

Lietuvoje matematikos didaktika yra vienas iš socialinių mokslų, keliantis sau tikslą atsakyti į klausimus: kokie turėtų būti šiandienos matematikos mokymo tikslai bei principai, koks turėtų būti matematikos mokymo turinys bei jo mokymo struktūra, ir, galiausiai, kaip mokyti ([40, 7 psl.]). Sunku įsivaizduoti, kad šie klausimai galėtų būti svarstomi be matematikų. Tai paaiškina mūsų paskutinę šio straipsnio rekomendaciją.

Skatinti matematikos tyrėjus ir dėstytojus dalyvauti pateikiant šiuolaikinę matematiką mokykliniu lygiu.

Šią rekomendaciją siejame su pačios matematikos statuso problemišku. Pagal Lietuvoje naudojamą mokslų klasifikavimo sistemą, matematika priklauso fizinių mokslų sričiai. Todėl matematikos taikymas, pavyzdžiui ekonomikai, yra papildomai suvaržomas dėl Lietuvoje sutarto mokslo pasidalijimo tarp humanitarinių ir socialinių mokslų grupės bei fizinių, biomedicininė ir technikos mokslų grupės. Mūsų aptariamam atveju, šis pasidalijimas tarp mokslo sričių taip pat turi neigiamą reikšmę, nes mokslų klasifikacija yra siejama su studijų klasifikacija. Joje matematika ir pedagogika patenka į dvi skirtingas studijų krypčių grupes: su pedagogika susijusi studijų krypčių grupė priklauso socialinių mokslų studijų sričiai, o matematika priklauso fizinių mokslų studijų sričiai. Tokia klasifikacija trukdo radikaliai keisti matematikos mokytojų ruošimą. Matematikų bendruomenė turėtų apsvarstyti įvairius šios problemos sprendimo variantus. Vienas iš jų galėtų būti naujos studijų krypties kūrimas. Šios

krypties studijose, greta universitetinės bendrosios matematikos dalykų, turėtų būti studijuojama matematikos istorija, matematikos filosofija ir matematikos pedagogika.

Literatūra

- [1] A. Abramov. Toward a History of Mathematics Education Reform in Soviet Schools (1960s-1980s). In: A. Karp, B.R. Vogeli (editors) *Russian Mathematics Education. History and World Significance*, pages 87–140, World Scientific Publishing, 2010.
- [2] A. Apynis. Matematinės analizės pradmenų dėstymo vidurinėje mokykloje klausimu. *Liet. matem. rink. LMD darbai*, 51:80–84, Vilnius, 2010.
- [3] A. Apynis, ir E. Stankus. Mokyklinė matematika ir studijos universitete. *Liet. matem. rink.*, 45(spec. nr.):247–249, Vilnius, 2005.
- [4] A. Apynis, ir J. Šinkūnas. Ar aukštosios matematikos pradmenys reikalingi Lietuvos gimnazijoje? *Liet. matem. rink.*, 47(spec. nr.):217–219, Vilnius, 2007.
- [5] K. Astala. *et al.* The PISA survey tells only a partial truth of Finnish children’s mathematical skills. *Matematiikkalehti Solmu*, 8(31), 2005. Prieiga per internetą (žiūrėta 2012.06.01): <http://solmu.math.helsinki.fi/2005/erik/PisaEng.html>
- [6] B. Barton. The Klein Projekt: A Living & Connected View of Mathematics for Teachers. An IMU/ICMI Collaboration: A short Description. *MSOR Connections*, 8(4):16–17, 2008.
- [7] M. Bashmakov. Challenges and Issues in Post-Soviet Mathematics Education. In: A. Karp, B.R. Vogeli (editors) *Russian Mathematics Education. History and World Significance*, pages 141–186, World Scientific Publishing, 2010.
- [8] S.-Y. Cheng, B. Nebres, K. Osterwalder and H.-H. Wu. The role of mathematicians in K-12 mathematics education. Panel C. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pages 1673–1696, Madrid, Spain, 2006.
- [9] V.V. Davydov. *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological problems in the Structuring of School Curricula*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia, USA, 1990.
- [10] R. Descartes. *Rinktiniai raštai//Samprotavimai apie metodą*. Parengė R. Ozolas. Mokslas, Vilnius, 1978.
- [11] K. Devlin. *The Math gene: How Mathematical Thinking Evolved and Why Numbers Are Like Gosip*. Basic Books, 2000.

- [12] J.A. Dossey. The nature of mathematics: its role and its influence. In D. Grouws, editor, *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, pages 39-48, New York, 1992, MacMillan.
- [13] D.B. Elkonin. Primary schoolchildren's intellectual capabilities and the content of instruction. In: L.P. Steffe (editor) *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*, Vol. VII, pages 13-54, Chicago, Illinois, USA, 1975, University of Chicago Press.
- [14] P. Ernest. Philosophy, mathematics and education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 20(4):555-559, 1989.
- [15] European Commission. *Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies*. Eurydice, 2011.
- [16] H.N. Jahnke. *Mathematik und Bildung in der Humboldtschen Reform*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1990.
- [17] J. Kaminskienė, D. Rimkuvienė ir E. Laurinavičius. Matematikos studijos prasadėjus aukštojo mokslo reformai. *Liet. matem. rink., LMD darbai* 51:109-114, Vilnius, 2010
- [18] J. Kilpatrick. Five lessons from the new math era. *New York State Mathematical Teachers' Journal*, 58:87-90, 2009. (Original work published on-line in 1997 at <http://www.nationalacademies.org/sputnik/kilpatin.htm>)
- [19] J. Kilpatrick. The new math as an international phenomenon. *ZDM Mathematics Education*, 2012.
- [20] D. Klein. A quarter century of US 'math wars' and political partisanship. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 22: 22-33, 2007.
- [21] F. Klein. *Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus. Teil I & II*. B.G. Teubner, Leipzig, 1907/1908.
- [22] I.P. Kostenko. Kodėl reikia grįžti prie Kiseliovo? *Universitetinė knyga*, Nr. 10:32-39, 2007. Rusų kalba. Prieiga per internetą (žiūrėta 2012.06.01): <http://www.portal-slovo.ru/art/36366.php>
- [23] I.P. Kostenko. 1970-1978 mm. mokyklinės matematikos reforma. „Kolmogorovo reformos“ 40-mečiui. *Alma Mater*, 2011 lapkričio 24. Prieiga per internetą (žiūrėta 2012.06.01): <http://www.almavest.ru/ru/favorite/2011/11/24/262/>
- [24] M. Kumar. Conceptions of mathematics to mathematics education research. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 2(3):7-10, 2011.
- [25] L. Lafforgue. Why the Public Schools. 2 January, 2008. <http://www.math.rochester.edu/people/faculty/rarm/whyschool.html>

- [26] G. Lakoff and R. Núñez. *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Beings*. 2000, Basic Books.
- [27] U. Leron. Mathematical thinking and human nature: consonance and conflict. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 217-224, 2004.
- [28] J. Lützen. The Foundation of Analysis in the 19th Century. In: H. N. Jahnke (editor) *A History of Analysis*, pages 155–195, 2003, American Mathematical Society, USA.
- [29] O. Martio. Long term effects in learning mathematics in Finland - curriculum changes and calculators. *The Teaching of Mathematics*, XII(2):51–56, 2009.
- [30] M. Mashaal. *Bourbaki: Une société de mathématiciens*. Éditions Pour la Science, Paris, 2002.
- [31] R. Norvaiša. Matematika ir jos reikšmė Lietuvos mokslui bei kultūrai. *Šiuolaikinis mokslas visuomenei*, II tomas, 41–71, Vilnius, 2011.
- [32] D. Pareja-Heredia. The Huge Gap between Math Education and the front of Mathematics. In *11th International Congress on Mathematical Education*, Mexico, 2008, written contribution (žiūrėta 2012.06.01): <http://tsg.icme11.org/document/get/571>
- [33] Platonas. *Valstybė*. Vertė Dumčius, J. Prada, Vilnius, 2000.
- [34] K. Podnieks. Platonism, intuition and the nature of mathematics. In: *Semiotika i informatika*, Vol. 31, pages 150–180, Moscow, 1990, VINITI (Rusų kalba). Vertimas į anglų kalbą su prieiga internete (žiūrėta 2012.06.01): <http://podnieks.id.lv/gt1.html>
- [35] Press Release. A Purge at the French High Committee for Education (HCE). November 27, 2005. <http://michel.delord.free.fr/llaff-eng.html>
- [36] F. Quinn. A Science-of-Learning Approach to Mathematics Education. *Notices of the American Mathematical Society*, 58(9):1264–1275, 2011.
- [37] F. Quinn. A revolution in Mathematics? What Really Happened a Century Ago and Why It Matters Today. *Notices of the American Mathematical Society*, 59(1):31–37, 2012.
- [38] A.H. Schoenfeld. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In: D. Grouws (editor) *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, pages 334–370, New York, 1992, MacMillan.
- [39] A.H. Schoenfeld. The Math Wars. *Educational Policy*, 18(1):253–286, 2004.
- [40] V. Sičiūnienė. *Matematikos didaktika. 1 knyga*. VPU leidykla, Vilnius, 2010.

- [41] A. Smith. *Making Mathematics Count: The report of Professor Adrian Smith's inquiry into post-14 mathematics education*. The Stationery Office, London, England, 2004.
- [42] A. Sossinsky. Mathematicians and Mathematics Education: A Tradition of Involvement. In: A. Karp, B.R. Vogeli (editors) *Russian Mathematics Education. History and World Significance*, pages 187–222, World Scientific Publishing, 2010.
- [43] S. Stotsky. Who Needs Mathematicians for Math, Anyway? *City Journal*,
- [44] K. Tarvainen and S.K. Kivelä. Severe shortcomings in Finnish mathematics skills. *Matematiikkalehti Solmu*, 9(23), 2005. Prieiga per internetą (žiūrėta 2012.06.01): <http://solmu.math.helsinki.fi/2005/erik/KivTarEng.html>
- [45] D. Tiešytė ir kiti. Matematika mokykloje, matematika universitete. Ar lengva peršokti į naujas roges? *Alfa plus omega*, 12(2):59–66, 2001.
- [46] V. Uspenskii. *Matematikos apologija*. Antras leidimas, rusų kalba. Amfora, Sankt-Peterburgas, 2012.
- [47] Vidurinio ugdymo bendrosios programos: matematika. Prieiga per internetą (žiūrėta 2012.06.01): <http://portalas.emokykla.lt>
- [48] H.-H. Wu. The 1997 mathematics standards war in California. In: Stotsky, S. (editor) *What is at Stake in the K-12 Standards Wars: A Primer for Educational Policy Makers*, pages 3–31, New York, 2000, Peter Lang Publishers.

Summary

Mathematics teaching is a world stranded in time

R. Norvaiša

In this article lessons learned from reforming national school mathematics systems in several countries are reviewed and conditions determining the quality of this system in Lithuania are discussed. It is argued that this quality depends on the existing gap between school mathematics and modern mathematics. In pursuance of a better quality of education system in Lithuania it is suggested to shape societies attitudes towards mathematics and to change education of mathematics teachers in order to improve nurturing mathematical culture and knowledge deepening. This is an achievable goal assuming the mathematics community will show single-minded and concerted efforts together with mathematics educators and education policy experts.

Keywords: school mathematics, modern mathematics, mathematical thinking, policy of mathematics education