KURTAS GÖDELIS
100-osios gimimo metinės

Rimas Norvaiša

2006 m. lapkričio 5 d.

Kurto Gödelio darbai, pasirodę laikotarpyje nuo 1929 iki 1939 metų, iš esmės pakeitė matematinę logiką, o jų autorius tapo žymiausiu XX-ojo amžiaus logiku. Kai kurių amžininkų nuomone, Gödelis buvo žymiausias logikas po Aristotelio (žr. [16, 2 pusl.]).

Svarbiausi Gödelį išgarsinę rezultatai rodo, jog matematika yra neišsemiama. Tiksliau, svarbiausiais laikomi teiginiai, jog bet kurioje neprieštaringoje formalioje teorijoje yra ir neįrodomų teiginių (žr. toliau 3.1 ir 5.1 teoremas), o pats neprieštaringumas yra teorijos viduje neįrodoma savybė (žr. toliau 3.2 teorema). Šie Gödelio teiginiai neretai vadinami nepilnumo teoremomis. Be to, Gödelis įrodė, jog aibių teorijoje pasirinkimo aksioma ir kontinuumo hipotezė yra suderinamos su kitomis aksiomomis.

Minėtus rezultatus Gödelis įrodė gyvendamas Vienoje, o 1940-ais metais jis emigravo iš Austrijos į Jungtines Valstijas ir isikūrė Prinstono priešakinių studijų institute (angl. Princeton Institute for Advanced Study). Ten toliau dirbo spręsdamas sunkiausias aibių teorijos problemas ir palaipsniui perėjo prie darbo matematikos filosofijoje. Nors Gödelio domėjimasis filosofija dominavo laikotarpiu nuo 1950 metų iki mirties 1978 metais, tuo pat metu jis sugebėjo aktyviai dirbti logikoje, teorinėje fizikoje ir kitose srityse.

Toliau šiame straipsnyje apžvelgiami Gödelio gyvenimas ir karjera. Antroje straipsnio dalyje (2, 3 ir 4 skyriuose) aiškinami pagrindinių jo rezultatų kontekstas ir esmė. A priede pateikiama pirmosios Gödelio nepilnumo teoremos įrodymo schema. Galiausiai B priede galima rasti nuorodas į pagrindinius bibliografinius šaltinius.

1 Gödelio gyvenimas ir karjera

Kurtas Friedrichas Gödelis (Kurt Friedrich Gödel) gimė 1906 metų balandžio 28 dieną Rudolfo ir Marianne Gödelių šeimoje, gyvenusioje Brünno mieste, tuo metu priklausančiam Austro-Vengrijos provincijai Moravia. Šiuo metu Gödelio gimtasis miestas vadinasi Brno ir priklauso Čekijai. Kurtas Gödelis tapo antruoju Gödelių šeimos sūnumi, toks ir išliko. Abu tėvai priklausė vokiškai kalbančių gyventojų mažumai. Tėvas, savo laiku atvykęs iš Vienos, dirbo tekstilės pramonėje ir ilgainiui tapo vienu iš tekstilės firmos savininkų. Gödelio mamos šeima atvyko į Brünno iš Rhinelando srites taip pat darbui tekstilės pramonėje.

Kurto Gödelio vaikystė nebuvo sunki, tačiau jis buvo drovus ir nesunkiai įskaudinamas berniukas. Būdamas šešerių ar septynerių metų, Gödelis susirgo sąnarių reumatu. Nors jis ir visiškai išgijo, bet nuo to laiko tapo įsitikinsiu, jog jo širdis yra pažeista. Apskritai Gödelis visą gyvenimą išliko ligotai atrodančiu, o į gyvenimo pabaigą ir perdėtai susirūpinusiu savo sveikata.

Labai aukšti Gödelio protiniai gebėjimai išryškėjo anksti. Savo šeimoje jis buvo vadinamas Herr Warum (Misteriu Kodėl). Sulaukęs šešerių metų, mokėsi Liuteronų mokykloje, o laikotarpiu nuo 1916 iki 1924 mokėsi vokiečių valstybinėje gimnazijoje. Mokykloje gaudavo aukščiausius įvertinimus visose disciplinose; ypatingai išsiskyrė matematikoje, kalbose ir tikyboje.

1924 metais baigęs gimnaziją, Gödelis išvyko studijuoti į Vienos universitetą. Vienoje jis praleido 15 metų, o 1929 metais įgijo Austrijos pilietybę. Gödelio studijų ir mokslinė veikla buvo susijusi su garsiuoju Vienos rateliu. Tarp studijuojančių jis išsiskyrė savo polinkiu mažai kalbėti, gebėjimu labai greitai suvokti bet kurios problemos esmę ir jos sprendimo būdus. Pagrindiniu Gödelio mokytoju tapo matematikas Hansas Hahnas (1879 - 1934), kuris jį supažindino su Moritzo Schlicko (1882 - 1936) suburta filosofų grupe. Schlicko grupė buvo siejama su loginiu pozityvizmu. Savo tikslu ši grupė laikė žinių sistemos loginę ir empirinę analizę, o filosofiją siekė paversti mokslu, atmesdami metafizinį spekuliavimą. Gödelis reguliariai lankė šios grupės diskusijas nuo 1926 iki 1928 metų, bet vėliau palaipsniui nutolo nuo jos palaikydamas kontaktus tik su kai kuriais grupės nariais.

Pagrindine Gödelio nepritarimo Vienos rateliui priežastimi buvo jo paties palaipsniui susiformavęs skirtingas filosofinis požūris, beveik diametraliai priešingas loginiam pozityvizmui. Nors, kai kurie loginio pozityvizmo šaltiniai padarė įtaką ir pačiam Gödeliui. Tarp jų buvo logicizmas, išvystytas garsiajame Whiteheado ir Russello veikale „Principia Mathematica". Tačiau didžiausią įtaką Gödelio tolesnei veiklai padarė Rudolfo Carnapo (1891-1970) matematinės logikos paskaitos ir 1928 metais pasirodžiusi D. Hilberto ir W. Ackermano knyga „Grundzüge der theoretischen Logik".

Pastarojo veikalo autoriai suformulavo uždavinį įrodyti, jog tam tikra pirmos eilės predikatų skaičiavimo aksiomų sistema yra pilna. Kitaip tariant klausiama, ar ta aksiomų sistema yra pakankama išvesti bet kurį logiškai galiojantį teiginį? Teigiamai išspręsdamas šią pilnumo problemą, Gödelis padarė labai gerą savo mokslinės karjeros pradžią ir sukurė sau kylančios žvaigždės reputaciją. Šis darbas tapo jo daktaro disertacija, kurią jis baigė 1929 metų vasarą Vienos universitete, o daktaro laipsnis jam buvo suteiktas 1930 metų vasarį.

Nuo 1930 metų Gödelis pradėjo intensyviai dirbti siekdamas realizuoti Hilberto programą - nustatyti formalizuotų aksiomų sistemų neprieštaringumą, naudojant vadinamąjį finitųjį metodą. Vykdydamas šią programą Gödelis priėjo visiškai netikėtos išvados, kuri iš esmės pakeitė ir pačios programos, ir visos matematikos įvaizdį. Būtent, bet kuri pakankamai sudėtinga formali sistema T, tenkinanti minimalias neprieštaringumo sąlygas yra *nepilna*: galima sukonstruoti tokią T sistemos formulę A, kad tiek A, tiek ir jos neiginys $\neg A$ yra neįrodomi. Faktiškai formulė A yra teisinga, nes jos atitikmuo neformalioje teorijoje teigia savęs neįrodomumą. Be to, T sistemoje yra galima formulė C_T, neformalioje teorijoje reiškianti neprieštaringumą, ir jei T sistema yra neprieštaringa, tai C_T formulė yra neįrodoma (smulkiau apie tai rašoma kituose skyreliuose).

Minėtieji Gödelio formalios sistemos nepilnumo rezultatai publikuoti 1931 metais, jam esant 25-erių metų amžiaus. Šie rezultatai galutinai patvirtino, jog jų autorius yra stipriausias logikas. Šį pripažinimą autorius įgyjo beveik iš karto, o jo darbas buvo apiformintas kaip habilitacinis. Habilitacija suteikė Gödeliui *Privatdozento* vardą, igalinantį jį skaityti paskaitas bet neįpareigojantį universitetą už tai mokėti atlygį.

Tuo metu Gödelio asmeniniame gyvenime taip pat vyko pokyčiai. Savo būsimą žmoną, Adelę Nimbursky, jis sutiko būdamas 21-ių metų amžiaus. Adelė buvo šokėja, prieš tai buvusi trumpam ištekėjusi ir šešiais metais vyresnė už būsimą vyrą. Matyt dėl griežto tėvo požiūrio į šias aplinkybes judviejų vestuvės įvyko tik po dešimties metų. Tuo laikotarpiu Kurtas Gödelis gyveno viename bute Vienoje su broliu ir mama, į kurį visa šeima persikraustė po tėvo mirties 1929 metais. Dėl savo neapmokamų *Privatdozento* pareigų Gödelis iš pradžių turėjo gyventi išlaikomas savo šeimos. Vėliau savo išlaidas jis galėjo kompensuoti pajamomis gautomis lankantis Prinstono priešakinių studijų institute Amerikoje. Į Prinstoną jis vyko bent tris kartus iki tol, kol galutinai ten persikraustė 1940 metais.

Laikotarpiu nuo 1932 iki 1936 metų, Gödelis paskelbė trylika trumpų bet reikšmingų straipsnių. Jų tematika labai įvairi; pavyzdžiui, intucionistinė logika, sprendimų problematika predikatų skaičiavime, geometrija, įrodymų teorija ir kt. Kaip ir visi jo darbai, šie straipsniai pasižymėjo dėstymo lakoniškumu ir aiškumu. Savo darbus Gödelis publikuodavo tik manydamas pasiekęs norimo tobulumo, ir matyt dėl labai aukštų reikalavimų sau, didesnė jo rankraščių dalis liko nepublikuota, kuri dabar prieinama jo pomirtiniame archyve Prinstone.

Didžiausią dėmesį minėtu laikotarpiu Gödelis skyrė dviems svarbiausioms aibių teorijos problemoms: visiško sutvarkymo principas (angl. the Well-Ordering Principle) ir kontinuumo galia (angl. the cardinality of the continuum). 1904 - 1908 metais E. Zermelo įrodė, jog visiško sutvarkymo principas yra ekvivalentus rinkimo aksiomai (angl. the Axiom of Choice). Zermelo rezultato dėka, ši aksioma taip pat reiškė, jog bet kuri begalinė aibė turi apibrėžtą galią, lygią atitinkamam transfinitiniam skaičiui. Rinkimo aksiomos reikalingumo matematikai ir jos pagrįstumo klausimas buvo nuolatinės kontraversijos šaltiniu (labai gerai atspindėtas [12] knygoje). Tuo tarpu kontinuumo galios klausimas iškilo po to, kai Cantoras įrodė, jog kontinuumas, t. y. realiųjų skaičių aibė, yra nesuskaičiuojama ir spėjo, jog jo galia yra lygi mažiausiam nesuskaičiuojamam kardinaliniam skaičiui. Pastarasis Cantoro spėjimas tapo garsiąja kontinuumo hipoteze.

Būtent šių dviejų aibių teorijos problemų sprendimui Gödelis sutelkė pagrindines pastangas po to, kai įrodė savo nepilnumo teoremas. Pirmas klausimas, kurį reikėjo išspręsti, tai nustatyti ar rinkimo aksioma ir kontinuumo hipotezė yra įrodomos remiantis likusiomis aibių teorijos aksiomomis. Gödeliui pavyko įrodyti teiginį: jei aibių teorijos Zermelo-Fraenkelio aksiomų sistema (be rinkimo aksiomos) yra neprieštaringa, tai prie jų prijungus rinkimo aksiomą ir kontinuumo hipotezę, gauta aksiomų sistema išlieka neprieštaringa. Iš šio rezultato išplaukia, jog neįmanoma įrodyti rinkimo aksiomos klaidingumą, ir, prijungus šią aksiomą prie Zermelo-Fraenkelio aksiomų sistemos, neįmanoma įrodyti kontinumo hipotezės klaidingumą. Liko atviru klausimas ar galima įrodyti teigiamą rezultatą, t.y. iš Zermelo-Fraenkelio aksiomų sistemos išvesti rinkimo aksiomą ir ją prijungus, išvesti kontinuumo hipotezę. Galutinai šį klausimą 1963 metais išsprendė Cohenas įrodydamas abiejų teiginių nepriklausomumą nuo Zermelo-Fraenkelio aksiomų sistemos, jei pastaroji yra neprieštaringa ([1]).

Tuo tarpu prieškariniai politiniai įvykiai paveikė ir Gödelį, nors asmeniškai jis buvo absoliučiai abejingas ir nejautrus politikai. Pirma, dideliai Gödelio nuostabai, jis pasirodė besąs tinkamu karinei tarnybai. Antra, panaikinus neapmokamą Privatdozento pareigybę, buvo įkurta nauja apmokama pareigybė. Tačiau eiti naujas pareigas reikėjo gauti valdžios leidimą, kas tuo metu reiškė atitikimą nacių partijos keliamiems reikalavimams. Buvimas visiškai apolitišku naciams pasirodė taip pat nepriimtinas ir todėl pareigybės suteikimas Gödeliui gerokai užtruko.

Tačiau, 1939 metų rudenį, Gödelis nusprendė nieko nelaukti ir persikelti su žmona į Prinstoną, kas jiems pavyko 1940 metų sausį.

Likusią savo gyvenimo dalį Kurtas Gödelis su žmona Adele praleido Prinstono priešakinių studijų institute. Ten jie susikūrė ramų visuomeninį gyvenimą. Artimiausiais Gödelio draugais buvo Albertas Einsteinas ir Oskaras Morgensternas. Pastarasis savo dienoraštyje aprašė daugelį istorijų susijusių su Gödeliu. Gal būt dažniausiai prisimenamos Amerikos pilietybės gavimo aplinkybės 1948 metų balandį. Kaip įprasta Gödeliui, bet kurį darbą jis atlikdavo labai stropiai, ir todėl įprastiems pilietybės gavimo egzaminams ruošėsi rimtai studijuodamas JAV konstituciją. Vieną dieną Gödelis atėjo pas Morgensterną labai susijaudinęs ir pasakė: „Aš aptikau logiškai imanomą legalią galimybę Jungtinėms valstijoms tapti diktatūra." Nesigilindamas į loginio argumento esmę ir suvokdamas tokios galimybės labai mažą tikėtinumą, Morgensternas primygtinai prašė Gödelio neprasitarti apie savo atradimą per egzaminą. Kitą rytą Morgensternas, Einsteinas ir Gödelis nuvyko į Trento, kur vyko pilietybės suteikimui privaloma egzaminavimo procedūra. Norėdamas išblaškyti Gödelį, Einsteinas visą kelią pasakojo anekdotus. Atvykus į Trento, matydamas tokius žinomus žmones kaip Einsteinas ir Morgensternas, juos pasitikęs valdininkas buvo maloniai nustebintas. Abu jie, kaip liūdininkai, buvo pakviesti kartu su Gödeliu į egzaminavimo kambarį, kas paprastai nedaroma. Kreipdamasis į Gödelį valdininkas pasakė: „Iki šiol jūs turėjote Vokietijos pilietybę." Gödelis pataisė jį paaiškindamas, kad jis yra austras. „Vis tiek", - tęsė valdininkas, - „ji buvo tokia pat bjauri diktatūra ... bet laimei, tai yra neįmanoma Amerikoje." „Priešingai", - sušuko Gödelis, - „aš žinau kaip tai gali atsitikti!" Visiems trims prireikė didelių pastangų tam, kad sulaikyti Gödelį nuo savo atradimo aiškinimo ir sėkmingai užbaigti trokštamą procedūrą.

Prinstono institute Gödelis neturėjo jokių formalių pareigų ir todėl buvo laisvas užsiimti bet kuria moksline veikla. Pirmaisiais metais naujoje vietoje jis tęsė ankstesnius matematinės logikos tyrimus įvairiomis kryptimis. Taip pat siekė įrodyti rinkimo aksiomos ir kontinuumo hipotezės nepriklausomumą, tačiau gautų rezultatų nepublikavo dėl jau minėtų aukštų reikalavimų sau.

Maždaug nuo 1943 metų Gödelis pilnai atsidėjo matematikos filosofijai. Jis yra gerai žinomas kaip tvirtas matematinio realizmo, dar vadinamo platonizmu, pozicijos atstovas. Tik nuo tada jis pradėjo šias savo pažiūras reikšti viešai ir aiškiai. Anksčiau publikuotuose darbuose galima rasti tik platonizmo užuominas. Be to, Gödelis buvo tvirtai įsitikines, kad tik dėl šių filosofinių pažiūrų jam pavyko padaryti svarbiausius savo atradimus logikoje.

Greta logikos ir filosofijos Gödelis taip pat dirbo tokiose srityse kaip matematika ir fizika, bei istorija ir teologija. Jo pomirtiniame archyve buvo rasta daug rankraščių skirtų visiems šiems klausimams.

Deja, į gyvenimo pabaigą, perdėtas rūpinimasis savo sveikata peraugo į paranoją. Nors ir būdamas rimtai sergančiu jis niekada nesikreipė į gydytoją savo noru. Žmona Adelė, visada jam padėjusi, į gyvenimo pabaigą nebegalėjo prižiūrėti vyro, nes pati rimtai susirgo. Gödelis mirė 1978 metais nuo prastos mitybos ir išsekimo. Jo žmona išgyveno trimis metais ilgiau už savo vyrą.

2 Matematikos pagrindai Hilberto programoje

Gödelio rezultatų svarbai suprasti verta prisiminti aplinkybes, lėmusias matematikos vystymąsį XIX amžiaus pabaigoje ir XX amžiaus pradžioje.

Nuo Platono, Aristotelio ir Euklido laikų, geriausiu matematikos žinių pagrindimo būdu laikomas aksiomatinis metodas. Kaip ir Euklido *Elementai*, matematika buvo tvarkoma naudojantis aksiomomis ir postulatais. Tačiau iki XIX a. pabaigos, galima kalbėti tik apie pseudoaksiomatinį metodą, nes šių dienų požiūriu, pateikiami įrodymai turėjo daug griežtumo trūkumų. Faktiškai, įrodymai buvo neformalūs ir intuityvūs, o pati įrodymo samprata greičiau buvo psichologinė, negu loginė. Be to, iki XIX a. pabaigos, aksiomomis buvo laikomi akivaizdžią tiesą atspindintys teiginiai, o matematinio teiginio teisingumą lėmė demonstravimas, jog jis logiškai išplaukia iš aksiomų. Greta aksiomatinio metodo praktiškai buvo naudojamas ir kitas metodas, kildinamas iš Demokrito materializmo. Šiam metodui priskiriami samprotavimai, besiremiantys intuicija ar eksperimentu. Iš tikro, ankstyvojoje matematikos žinių sistemoje griežtas samprotavimas buvo retas reiškinys.

Perėjimą prie griežtų samprotavimų XIX a. pabaigos matematikoje žymi aibių teorijos atsiradimas (G. Cantoras), analizės aritmetizavimas (A. Cauchy, K. Weierstrassas, R. Dedekindas), natūraliųjų skaičių aritmetikos aksiomatizavimas (G. Peano), ne-Euklidinės geometrijos atsiradimas (N. I. Lobachewsky, J. Bolayi, C. F. Gaussas), geometrijos aksiomatizavimas (M. Paschas, D. Hilbertas), matematinės logikos gimimas (G. Boole, A. de Morganas, G. Frege, B. Russellas) ir semantinės antinomijos (G. D. Berry, K. Grellingas). Šie rezultatai įgalino intuicija ir akivaizdumu grįstą argumentavimą pakeisti logine dedukcija. Iš esmės matematika tapo abstrakčių struktūrų tvarkos logine analize. Nuo tada, vertinant matematinių samprotavimų korektiškumą, pereita prie logikos naudojimo.

Orientavimasis į abstrakcijas ir loginį griežtumą tolino matematiką nuo jutiminio pasaulio. Matematikos naudingumą užtikrinęs jos taikomumas kituose moksluose ilgainiui tapo vis akivaizdesne problema. Naujos matematikos teorijos vis dažniau atsiranda ne iš praktikos ar kitų mokslų poreikių, bet yra motyvuojamos vidine matematikos logika ir vidinio matematikos grožio kriterijais. Tokiu atveju kyla klausimas ar aksiomatinė matematikos teorija gali tapti reikšminga pati savaime kuria nors prasme?

Atsakant į pastarąjį klausimą pirmiausia galima teigti, jog aksiomatinė teorija yra reikšminga, jei galima rasti ar sukonstruoti tokią matematikos objektų klasę, kuriai galioja ta aksiomų sistema. Pavyzdžiui, Peano aksiomatika pati savaime būtų mažiau vertinga jei neturėtume natūralių skaičių aibės, kuri tenkina šias aksiomas. Deja, šis reikšmingumo kriterijus pasirodė besąs gana griežtas; jį tenkinančių teorijų yra labai nedaug.

Silpniausią iš galimų aksiomatinės teorijos reikšmingumo kriterijų pasiūlė D. Hilbertas (1862 - 1943). Jis siūlė aksiomatinę teoriją laikyti reikšminga, t. y. charakterizuojančia kurią nors abstrakčios struktūros tvarką, jei galima įrodyti jog niekados iš aksiomų nebus išvedamas prieštaravimas. Tiksliau, Hilberto laikoma esmine, matematikos pagrindų problema formuluojama taip: *kiekvienoje matematikos srityje būtina įrodyti, jog naudojantis tik tos srities metodais neįmanoma įrodyti du teiginius iš kurių vienas prieštarauja kitam.*

Aksiomatinės sitemos neprieštaringumo problemai spręsti Hilbertas siūlė formalizuoti matematinį samprotavimą. Tai reiškia, jog matematikos teoriją turėtų sudaryti tik vienintelę jiems priskiriamą prasmę turinčių simbolių abėcėlė, aksiomų rinkinys ir teiginių išvedimo taisyklės. Visą tai, kartu su išvedamais iš aksiomų teiginiais vadinama *formalia sistema*. Be to, Hilberto nuomone, išvedimo taisyklės privalo atitikti finitųjį metodą, t.y. tam, kad nustatyti ar simbolių seka yra *taisyklingai suformuota formulė* (angl. well formed formula), ar ji yra aksioma ir ar ji yra įrodymas, reikalingas tik baigtinis žingsnių skaičius.

Kaip minėta, svarbiausia formalios sistemos savybė yra jos *neprieštaringumas* (angl. consistency), t.y. formalioje sistemoje neįmanoma įrodyti tokių dviejų teiginių iš kurių vienas prieštarauja kitam. Hilbertui sistemos neprieštaringumas reiškė ir matematinės tiesos kriterijų ir matematikos objektų egzistavimo patvirtinimą. Kitaip tariant, matematinės tiesos aksiomatinio tyrimo esmė jam reiškė ir teiginių loginių tarpusavio ryšių nustatymą ir teoremos (tiesos) vietos nustatymą toje ryšių sistemoje.

Galiausiai, Hilberto požiūriu, formalią matematikos sistemą privalo sudaryti tik tie teiginiai, kurie yra įrodomi, t.y. formali sistema privalo būti *pilna*. Šiuo atveju reiškia, jog teiginio teisingumas ir įrodomumas yra tapačios sąvokos. Visa tai vadinama matematikos pagrindų *Hilberto programa*.

Netrukus po šios programos formulavimo Gödelis parodė, jog ji iš principo nėra realizuojama jei formali sistema yra pakankamai sudėtinga. Viename iš savo straipsnių publikuotų 1931 metais Gödelis įrodė, jog bet kurioje pakankamai sudėtingoje formalioje teorijoje neįmanoma įrodyti jos neprieštaringumą. Savo ruožtu, šiam faktui įrodyti, Gödelis sukonstravo taisyklingai suformuotą formulę, kurios negalima nei įrodyti, nei paneigti. Kitaip tariant, jei formali teorija yra neprieštaringa tai ji yra nepilna. Abu šie Gödelio teiginiai dažnai vadinami pirma ir antra nepilnumo teoremomis.

3 Gödelio nepilnumo teoremos

Gödelio nepilnumo teoremos aiškiai parodė skirtumą tarp to, kas yra „tiesa" apie natūralius skaičius ir to, kas apie juos yra „įrodoma". Tuo pačiu šios teoremos visiškai pakeitė Hilberto matematikos pagrindų programą, kuri ilgainiu tapo matematine įrodymų teorija.

Melagio paradoksas. Pirmosios Gödelio teoremos įrodymą sudaro konstravimas ir nagrinėjimas teiginio, kuris iš pirmo žvilgsnio primena garsųjį melagio paradoksą. Paradoksą sukuria teiginys:

$$\text{„šis teiginys yra klaidingas".} \tag{1}$$

Taigi, jei (1) teiginys yra teisingas, tai jis yra klaidingas. Atvirkščiai, jei (1) teiginys yra klaidingas, tai jis yra teisingas.

Bandant išsiaiškinti šio paradokso priežastis, pirmiausia į galvą ateina mintis, jog problema slypi nuorodoje į savę. Tačiau, šios savybės galima išvengti formuluojant tą patį paradoksą dviem teiginiais: kitas teiginys yra teisingas; ankstesnis teiginys yra klaidingas. Šiuo metu yra žinomas ne vienas melagio paradokso aiškinimo būdas (žr. [3]).

Gödelis pasinaudojo panašiu teiginiu ir išvengė paradoksalumo, pakeisdamas sąvokas teisingas-klaidingas į sąvokas įrodomas-neįrodomas. Ši idėja grindžiama tuo, kad matematikos teorijos teiginys gali būti neįrodomas bet teisingas (priešingai Hilberto programos nuostatai).

Euristinis argumentas. Visų pirma, Gödelis nagrinėjo natūraliųjų skaičių aritmetikos formalią sistemą. Jis sukonstravo tokią taisyklingai suformuotą formulę G, kuri neformalioje kalboje išreiškiama teiginiu:

$$\text{„formulė } G \text{ nėra įrodoma".} \tag{2}$$

Nagrinėjamoje formalioje sistemoje formulė G yra nei įrodoma nei paneigiama. Iš tikrųjų, tarkime, kad G yra įrodoma. Tada teisingas (2) teiginys, kurio turinys prieštarauja prielaidai. Dabar tarkime, kad formulės G neigimas $\neg G$ yra įrodomas. Tada teisingas teiginys priešingas (2), t.y. teisingas teiginys „formulė G yra įrodoma", kurio turinys vėl prieštarauja prielaidai. Tokiu būdu, labai tikėtinas dalykas, jog jei formalioje sistemoje prieštaravimai nėra galimi, tai formulė G yra nei įrodoma nei paneigiama. Iš tikro, Gödėlis neabejotinai pagrindė savo argumentą.

Pirmoji nepilnumo teorema. Gödelio argumentu grindžiama teorema galioja ne visoms formalioms sistemoms. Visų pirma formali sistema privalo būti neprieštaringa, t.y. joje negalima įrodyti ir formulę A ir formulę $\neg A$. Priešingu atveju joje galima būtų įrodyti bet kurią formulę. Antra, formalios sistemos išvedimo taisyklės yra tik baigtinio ilgio - finitumo sąlyga, kurios savo programoje reikalavo Hilbertas. Trečia sąlyga yra ta, kad formalizuojamoji matematikos teorija būtų pakankamai turtinga, pavyzdžiui, ji turi apimti įprastinę aritmetiką. Šią sąlygą išpildo aritmetika, kurioje apibrėžta sumos ir sandaugos tarp natūraliųjų skaičių operacijos, tenkinančios Peano aksiomatiką ir todėl vadinama Peano aritmetika.

Paprastai pirmąja Gödelio teorema vadinamas teiginys:

3.1 Teorema. *Tegul T yra Peano aritmetikos formali sistema. Jei T yra neprieštaringa, tai joje yra formulių, kurių negalima nei įrodyti nei paneigti.*

Iš tikro Gödelis įrodė šiek tiek silpnesnį teiginį (žr. 5.1 teoremą A priede), bet pakankamai stiprų, kad iš jo dar galima būtų išvesti kitą nepilnumo teoremą.

Antroji nepilnumo teorema. Pirmoji nepilnumo teorema remiasi prielaida, jog formali teorija yra neprieštaringa. Kadangi teorema taikoma konkrečioms formalioms teorijoms, tai natūralu bandyti įsitikinti, jog joms neprieštaringumas yra ne prielaida bet įrodomas faktas. Pasirodo, jog toks faktas iš principo nėra įrodomas pačios teorijos viduje. Būtent, remdamasis pirmąja nepilnumo teorema, Gödelis įrodė, jog prielaida apie teorijos neprieštaringumą yra neįrodoma tos teorijos priemonėmis.

Šios teoremos įrodymo schema gana paprasta. Svarbiausia, ko reikia, tai sugebėti neprieštaringumo savybę išreikšti formalioje sistemoje. Tuo tikslu galima remtis paprastu faktu, jog formali sistema yra neprieštaringa tada ir tik tada, kai joje yra bent viena neįrodoma formulė. Taigi, jei, pavyzdžiui, $0 = 1$ nėra įrodoma T sistemoje, tai ji yra neprieštaringa.

Neformaliosios aritmetikos teiginys „$0 = 1$ nėra įrodoma" T sistemoje atitinka formulę, kurią žymėsime C_T. Remiantis pirmąja nepilnumo teorema, jei T sistema yra neprieštaringa, tai formulė G joje nėra įrodoma. Jau žinome, jog teiginys „G nėra įrodoma" atitinka pačią formulę G. Todėl formalioje sistemoje įrodoma implikacija: $C_T \Rightarrow G$. Tarkime, kad

$$T \text{ teorijoje neprieštaringumas yra įrodomas.} \tag{3}$$

Tai reiškia, jog įrodoma formulė C_T. Remiantis C_T formule, implikacija $C_T \Rightarrow G$ ir išvedimo taisykle „modus ponens" išplaukia, kad įrodoma formulė G. Bet tai yra prieštaravimas pirmajai Gödelio teoremai, įrodantis jog prielaida (3) nėra teisinga. Šie argumentai pagrindžia tokio teiginio įrodymo idėją:

3.2 Teorema. *Tegul T yra Peano aritmetikos formali sistema. Jei T yra neprieštaringa, tai ši savybė T sistemos priemonėmis nėra įrodoma.*

Šis teiginys dažnai vadinamas Gödelio antrąja nepilnumo teorema. Kaip minėta, jos esmė yra neprieštaringumo įrodymo negalimamas teorijos viduje ir tai neužkerta galimybės šią savybę įrodyti kitomis priemonėmis. Iš tikro taip ir yra, Peano aritmetikos neprieštaringumas buvo įrodytas naudojantis transfinitine indukcija (Gentzen, 1936), bei kitomis priemonėmis.

Nepilnumo teoremų poveikis matematikai. [5] straipsnyje apie Gödelio nepilnumo teoremas S. Fefermanas rašo: „nors viena ar kita forma plačiai žinomos tarp matematikų ir nors manoma, kad jos reiškia kažką fundamentalaus apie matematinio žinojimo ribas ir galimybes, tikroji šių rezultatų svarba matematikai yra mažai suprasta". Toliau lygindamas Gödelio teoremas su žinomomis matematikos problemomis, autorius pastebi, jog formalios sistemos nepilnumo savybė matematikų bendruomenei tapo visiškai netikėtu rezultatu. Panašiai, kaip antikos laikais buvo netikėta atrasti, jog greta racionaliųjų skaičių egzistuoja ir realūs transcendentiniai skaičiai. Gödeliio sukonstruota neįrodoma formulė G gali atrodyti dirbtine. Bet kol kas niekas dar neįrodė, jog Goldbacho problema ar Riemanno hipotezė yra natūraliai matematikoje atsiradusios, bet iš principo neišsprendžiamos problemos.

Viena ar kita forma Gödelio nepilnumo teoremos iliustruoja matematikos teiginių neišsemiamumo savybę.

4 Gödelio matematikos filosofijos bruožai

Gödelis buvo tvirtai įsitikinęs matematinio realizmo, šiuo metu vadinamo tiesiog platonizmu, atstovu. XX-o amžiaus pradžioje panašias nuostatas matematikos filosofijoje turėjo tokie matemmatikai, kaip Cantoras, Frege, Zermelo ir kiti. Be to, platonizmo pažiūros atitinka daugumos dirbančių matematikų intuityvią jų veiklos motyvaciją. Tačiau vyraujančios to meto matematikos filosofijos mokyklos buvo kritiškos matematinio realizmo atžvilgiu.

S. Fefermanas taip apibūdino Gödelio filosofines nuostatas [4, pusl. 143]: „Matematikos objektai pasižymi egzistavimo nepriklausomumu ir realumu būdingu fizikos objektams. Matematikos teiginiai atspindi tą realybę, o jų teisingumo klausimą apsprendžia objektyvūs faktai, nepriklausantys nuo mūsų mąstymo ir supratimo. Kaip ir esminių fizikos objektų atveju, mes galime neturėti esminių matematikos objektų tiesioginio suvokimo galimybės, bet gi vėl, remiantis analogija, tokių objektų egzistavimo prielaida yra būtina betarpiškų pojūčių aiškinimui. Matematikos objektai ir aksiomos yra patenkinamos matematikos žinių sistemos būtini elementai, panašiai, kaip fizikos objektai ir pagrindiniai fizikos dėsniai yra būtini patenkinamam regimo pasaulio paaiškinimui. Tokių prielaidų reikalaujančiais matematikos „jutiminių duomenų" pavyzdžiais yra tie aritmetikos teiginiai, kurių universalumo apibendrinimas verčia išeiti už aritmetikos ribų; tai yra Gödelio nepilnumo teoremos išvada. Nors matematikos objektai ir jų savybės gali ir nebūti mums tiesiogiai suvokiami, jų grynai matematinio pažinumo šaltiniu gali būti matematinė intuicija. Tokia intuicija gali būti lavinama giliu objekto tyrimu, ir kuri šiuo būdu įgalina naujus pagrindinius teiginius priimti kaip aksiomas. Kitokį matematikos aksiomų pagrindimą suteikia jų naudingumas ir išvadų gausa; tačiau tai yra mažiau tikra nei tai, ką suteikia intuicija". (citatos pabaiga)

Šis Gödelio požiūris į matematikos objektų prigimtį susiformavo anksti, dar iki jam įsijungiant į Vienos ratelio veiklą, t.y. apie 1925 metus. Gödelio teigimu, būtent šis jo požiūris įgalino jį atrasti matematikos neišsemiamumo savybę.

Hilberto programa remiasi požiūriu, jog matematikos teiginys yra teisingas tada ir tik tada, kai jis yra įrodomas, t.y. „tiesos" ir „įrodomumo" sąvokos yra tapačios. Toks šių sąvokų tapatinimas ir bandymas įrodyti skaičių teorijos neprieštaringumą atsiremia į melagio paradoksą. Išeitį iš šios aklavietės Gödelis rado idėjoje, jog „tiesos" savybės neįmanoma suformuluoti naudojant tą pačią kalbą. Kadangi "įrodomumo" savybę galima apibrėžti formalios sistemos viduje, tai abi šios savybės yra skirtingos.

Viename iš savo laiškų (cituojamame [4, 158 pusl.]), Gödelis rašo: „aš manau, jog mano [nepilnumo] teorema ... yra ... apie tai, kad pilnas epistemologinis kalbos A apibudinimas nėra įmanomas toje pačioje kalboje A, kadangi A kalbos sakinio tiesingumas negali būti apibrėtas toje pačioje kalboje A. Nors aš to tiesiogiai neformulavau savo 1931 metų straipsnyje, bet padariau tai savo Prinstono paskaitose 1934-ais. Tokią teoremą įrodė Tarskis savo straipsnyje apie tiesos sampratą publikuotame 1933-ais [15]" (citatos pabaiga).

Tiriantys Gödelio palikimą ne kartą atkreipė dėmesį į faktą, jog jis vengė viešai formuluoti savo filosofines pažiūras iki 1944 metų. S. Fefermanas skyrė ypatingą dėmesį bandymams paaiškinti tokio elgesio motyvus. Savo [4] knygos 7 skyriuje jis daro išvadą, kad taip elgtis Gödelį vertė jo kritiškas požiūris į to meto „filosofinius prietarus". Gödelis manė, jog jo darbas, grindžiamas objektyvistine matematikos tiesos samprata, būtų atmestas to meto matematikos elito, kuriame dominavo Hilberto ir kitų idėjos.

R. Murawskis [13] nagrinėjo Gödelio nepilnumo teoremų įtaką tiesos ir įrodymo sampratų matematikoje suvokimo procesui. Straipsnio pabaigoje jis taip formuluoja savo išvadą: „... patį tiesos ir įrodomumo sampratų skirtingumą matematikoje suponuoja tam tikros filosofinės prielaidos. Faktiškai, tikram formalistui ir intuicionistui tiesos-įrodymo problema neegzistuoja. Jiems matematikos teiginys yra teisingas tik tada, kai jis yra įrodomas, o pats įrodymas yra sintaksinė arba proto konstrukcija priklausanti nuo mūsų. Platonizmo (realizmo) matematikos filosofijoje atveju situacija yra skirtinga. Galima teigti, jog būtent platonizmo požiūris matematikoje įgalino Gödelį suformuluoti problemą ir leido skirti tiesą nuo įrodymo, bei sintaksę nuo semantikos."

5 A priedas: pirmosios nepilnumo teoremos įrodymo schema

3.1 teorema yra daugiau ar mažiau šiuolaikinis Gödelio pirmosios nepilnumo teoremos variantas. Čia suformuluosime ir aptarsime teoremą, kuri beveik atitinka Gödelio teoremą įrodytą [8]. Originalioje teoremoje kalbama ne apie Peano aritmetiką, bet apie Whiteheado ir Russello „Principia Mathematica" nagrinėtos sistemos pratęsimo variantą ([17]).

Taip pat, vietoje 3.1 teoremoje minėto neprieštaringumo Gödelis iš formalios sistemos reikalavo šiek tiek stipresnės savybės. Būtent, formali sistema T vadinama ω neprieštaringa, jei joje nėra tokios taisyklingai suformuluotos formulės (toliau tiesiog tsf) $H(y)$ su vienu laisvu kintamuoju, kad būtų įrodoma:

$$H(0), \quad H(1), \quad H(2), \quad \ldots \quad \text{ir} \quad \exists y \neg H(y). \tag{4}$$

Tuo atveju, kai $H(y) = H$ su kiekvienu y, t.y. jei tsf H nepriklauso nuo laisvo kintamojo, tai (4) sąraše lieka tik dvi tsf: H ir $\neg H$. Todėl iš ω neprieštaringumo išplaukia tai, kas vadinama (paprastu) neprieštaringumu.

5.1 Teorema. *Tegul T yra Peano aritmetikos formali sistema. T sistemoje yra tokia taisyklingai suformuluota formulė G, kuriai teisinga (a) ir (b), čia*

(a) *G nėra įrodoma, jei T yra neprieštaringa;*

(b) *$\neg G$ nėra įrodoma, jei T yra ω nepriештaringa.*

Šios teoremos įrodymui suprasti yra patogu atskirti tris skirtingas sritis: neformalią (įprastinę) Peano aritmetiką, jos formalią sistemą T ir meta-loginę T sistemos interpretaciją. Į kiekvieną iš šių sričių galima žiūrėti kaip į atskirą kalbą ir tokiu atveju yra būtina sugebėti tiksliai versti teiginius iš vienos kalbos į kitą. Svarbiausiu tokio vertimo įrankiu yra Gödelio sugalvotas T sistemos kodavimas, vadinamas *Gödelio numeracija*.

Gödelio numeracija remiasi pagrindine aritmetikos teorema, t.y. bet kuris natūralusis skaičius išreiškiamas pirminių skaičių sandauga vieninteliu būdu (tapatinant skirtingus tų pačių skaičių išdėstymo būdus). Tarkime, kad$T$ sistemos abėcėlę sudaro m simbolių (begalinę simbolių eilę $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ galima išreikšti rekursine formule naudojant tik du simboius 0 ir nuoseklaus keitimo funkciją s: $s(n) := n + 1$). Kiekvienam abėcėlės simboliui priskiriamas vienintelis pirminis skaičius, vadinamas simbolio numeriu. Bet kuri T sistemos formulė, taisyklingai suformuota ar ne, yra abėcėlės simbolių rinkinys. Tarkime, kad formulę F sudaro n simbolių su numeriais $k_1, \ldots, k_n$, tarp kurių gali būti ir lygūs. Šią formulę galime išreikšti natūraliu skaičiumi $m := p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$, čia $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $\ldots$ yra pirminiai skaičiai, išdėstyti didėjimo tvarka. Šis m vadinamas F formulės Gödelio numeriu jei F yra tsf ir toks sąryšis yra abipus vienareikšmė atitiktis tarp visų T sistemos tsf ir atitinkamo natūralių skaičių poaibio sudaryto iš Gödelio numerių. Kitaip tariant, Gödelis parodė, jog egzistuoja algoritmas, pagrįstas rekursyvios funkcijos samprata, įgalinantis nustatyti ar natūralus skaičius yra Gödelio numeris.

Pasirodo, jog Gödelio numeracija yra tinkama ne tik T sistemos tsf kodavimui. Toliau naudodamas rekursyviąsias funkcijas apibrėžtas natūrinių skaičių aibėje, Gödelis parodė, jog jo numeracija įgalina identifikuoti ir T sistemos įrodymus, t.y. tam tikru būdu Gödelio numeris vienareikšmiškai priskiriamas ir įrodymą sudarančiai tsf eilei.

Be kita ko, Gödelio numeracija įgalina suformuluoti vadinamąjį „vertimo principą" tarp neformalios aritmetikos ir jos formalios sistemos T. Tegul $F(x)$ yra kuri nors T sistemos tsf su laisvu kintamuoju x, kurios Gödelio numeris yra m. Neformalioje aritmetikoje jai atitinka teiginys $Form(m)$ reiškiantis, kad „m yra tsf kodas" Jei $Arg(m, n)$ žymi neformalios aritmetikos teiginį: „$Form(m)$ atitinkančios tsf įrodymo Gödelio numeris yra n", tai remiantis „vertimo principu", T sistemoje jam atitinka tokia tsf $A(\bar{m}, \bar{n})$, siejanti skaitmenis $\bar{m}, \bar{n}$, kuriai galioja savybės:

$$\text{jei teiginys } Arg(m, n) \text{ teisingas, tai tsf } A(\bar{m}, \bar{n}) \text{ įrodoma;} \tag{5}$$

$$\text{jei teiginys } Arg(m,n) \text{ klaidingas, tai tsf } \neg A(\bar{m},\bar{n}) \text{ įrodoma.} \tag{6}$$

T sistemoje nagrinėkime tsf $F(x) := \forall\, y\, \neg A(x,y)$ su vienu laisvu kintamuoju. Tegul p yra jos Gödelio numeris, o $\bar{p}$ yra atitinkamas skaitmuo T sistemoje. Tada, remiantis $Arg(m,n)$ apibrėžimu, tsf

$$G := F(\bar{p}) = \forall\, y\, \neg A(\bar{p},y) \tag{7}$$

meta-loginėje sistemos interpretacijoje atitinka teiginys „tsf G nėra įrodoma". Atliekant pilną įrodymą, tsf $G = F(\bar{p})$ gaunama naudojant metodą panašų į Cantoro diagonalizacijos metodą.

Kadangi tsf G neturi laisvų narių, tai apie ją galima klausti ar ji yra įrodoma ar ne. Prieštaros būdu parodysime, kad nei G nei jos neigimas $\neg G$ nėra įrodomi T sistemoje. Neformalios aritmetikos kalboje G yra teisinga formulė arba tiesiog tiesa.

5.2 Lema. *Su kiekvienu natūraliu skaičiumi* k, $Arg(p,k)$ *teiginys yra klaidingas.*

Iš tikro, tarkime priešingai, jog $Arg(p,k)$ teiginys yra teisingas su kuriuo nors k. Pagal šio teiginio apibrėžimą, k yra tsf $G = F(\bar{p})$ įrodymo Gödelio numeris, o tai reiškia, jog (7) yra įrodoma. Iš kitos pusės, remiantis (5) teiginiu, T sistemoje yra įrodoma formulė $A(\bar{p},\bar{k})$, o tai reiškia, kad yra įrodoma formulė $\exists\, y\, A(\bar{p},y)$. Remiantis *reductio ad absurdum*, pastaroji tsf yra ekvivalenti tsf $\neg(\forall\, y \neg\, A(\bar{p},y))$. Tokiu būdu yra įrodoma tsf $\neg\, G$. Kadangi T sistema yra neprieštaringa pagal prielaidą, tai negali būti įrodomi ir G ir $\neg\, G$. Todėl 5.2 lemos teiginys yra teisingas.

Dabar tarkime, kad formulė (7) yra įrodoma. Tada egzistuoja jos įrodymo Gödelio numeris k. Tokiu atveju yra teisingas teiginys $Arg(p,k)$, ko negali būti remiantis 5.2 lema. Todėl formulė (7) nėra įrodoma T sistemoje.

Galiausiai tarkime, kad įrodoma tsf $\neg F(\bar{p}) = \neg(\forall\, y\, \neg A(\bar{p},y))$, ekvivalenti tsf $\exists\, y\, A(\bar{p},y)$. Iš kitos pusės, remiantis 5.2 lema, $Arg(p,k)$ teiginys yra klaidingas su kiekvienu $k = 0,1,2\ldots$. Todėl remiantis (6) teiginiu, yra įrodoma tsf $\neg A(\bar{p},\bar{k})$ su kiekvienu skaitmeniu $\bar{k}$. Tokiu būdu įrodomos formulės:

$$\neg A(\bar{p},0), \quad \neg A(\bar{p},1), \quad \neg A(\bar{p},2), \quad \ldots \quad \text{ir} \quad \exists\, y\, A(\bar{p},y),$$

t. y. įrodomos formulės (4) kai $H(y) = \neg A(\bar{p},y)$. Tačiau tai prieštarauja prielaidai, kad T sistema yra ω neprieštaringa. Vadinasi (7) tsf negalima nei įrodyti nei paneigti, o 5.1 teoremos įrodymo schema tuo ir baigiasi.

B priedas: bibliografinės pastabos

Rašydamas skyrelį „Gödelio gyvenimas ir karjera", rėmiausi straipsniu "Gödel's life and work" iš [9, Vol. I, pusl. 1-36], kuris yra perspausdintas [4, 6 skyrius]. Gilų ir išsamų Gödelio gyvenimo ir veiklos aprašymą galima rasti biografinėje knygoje J. W. Dawson [2].

Pagrindinis Gödelio darbų šaltinis yra penki jo rinktinių raštų tomai [9]. Daug nuorodų į pirminius šaltinius galima rasti Kurto Gödelio draugijos (Kurt Gödel Society) internetiniame puslapyje: `http://kgs.logic.at`

Detalūs Gödelio teoremų įrodymai ir įvairūs jų variantai pateikiami beveik kiekviename matematinės logikos vadovelyje. A priede aprašyta schema remiasi Kleene [11, pusl. 204-223] knygos įrodymu.

Pastaruoju metu vis daugiau pasirodo knygų skirtų matematikos neišsemiamumo problemai išplaukiančiai iš Gödelio nepilnumo teoremų. Čia paminėsime tik vieną iš jų parašytą T. Franzén [6]. Elementarus ir laisvai internete prieinamas kursas Gödelio teoremų tema yra K. Podnieks [14].

Dar viena išskirtinė Gödelio matematinės logikos rezultatų ypatybė yra jų daroma didžiulė įtaka tokioms sritims kaip filosofija, teologija, fizika, literatūros kritika, fotografija, architektūra ir kita. Tiesa, ta įtaka yra keista, nes paplitusios nepilnumo teoremų interpretacijos dažniausiais ignoruoja teiginių prielaidas arba tiesiog išplaukia iš to dalyko nesupratimo. Plačiau apie tai rašo Franzén [7].

Literatūra

[1] P. J. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. W. A. Benjamin, New York, 1966.

[2] J. W. Dawson, *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*. A.K.Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1997.

[3] B. Dowden, *Liar Paradox*. The Internet Encyclopedia of Philosophy. `http://www.iep.utm.edu/p/par-liar.htm`

[4] S. Feferman, *In the Light of Logic*. Oxford University Press, 1998.

[5] S. Feferman. The Impact of the Incompleteness Theorems on Mathematics. *Notices AMS*, April 2006. `http://www.ams.org/notices/200604/fea-feferman.pdf`

[6] T. Franzén, *Inexhaustibility. A non-exhaustive treatment.* Lecture Notes in Logic 16. Association For Symbolic Logic, 2004

[7] T. Franzén, *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to Its Use and Abuse.* A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 2005.

[8] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **38** (1931), 173-198. Vertimas į anglų kalbą: [10, pusl. 596-616] ir internetinė versija `http://home.ddc.net/ygg/etext/godel/index.htm`

[9] K. Gödel, *Collected Works*. S. Feferman et al. (eds.) Vol. I: Publications 1929-1936; Vol. II: Publications 1938-1974; Vol. III: Unpublished Essays and Lectures; Vol. IV: Selected Correspondence, A-G; Vol. V: Selected Correspondence, H-Z. Oxford University Press, 1986; 1990; 1995; 2003; 2003 respectively.

[10] J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1897-1931*. Harvard University Press, 1967.

[11] S. C. Kleene, *Introduction to metamathematics*. D. van Nostrand Com., 1952.

[12] G. H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development, and Influence*. Springer, New-York, 1982.

[13] R. Murawski, Truth vs. provability - philosophical and historical remarks. *Logic and Logical Philosophy*, **10** (2002), 93-117.

[14] K. Podnieks, *What is Mathematics: Gödel's Theorem and Around.* Hypertextbook for students. `http://www.ltn.lv/˜podnieks/gt.html`

[15] A. Tarski, Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych. *Nakladem Towarzystwa Naukowego Warsawskiego*, Warszawa, 1933. Translated on pp. 152-278 of *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*. J. H. Woodger (ed.). Clarendon Press, Oxford, 1956.

[16] H. Wang, *A Logical Journey. From Gödel to Philosophy.* The MIT Press, 1996.

[17] A. N. Whitehead and B. Russell, *Principia Mathematica*. (1910, 1912, 1913) 3 vols, Cambridge: Cambridge University Press.