Šiuolaikinės matematikos filosofijos panorama

Rimas Norvaiša

Vilnius, 2009 m. birželio mėn. 19 d.

Ką tiria matematikos filosofija?

Pavyzdys. Nagrinėkime teiginį

„3 yra pirminis skaičius".

Šio teiginio forma: objektas X turi savybę F. Jis panašus į teiginį „mėnulis yra apvalus". Lyginant šiuos du teiginius, aišku, kas yra mėnulis ir kokia jo apvalumo savybės prasmė. Ar galima kažką panašaus sakyti apie objektą 3? Kas yra 3? Kokia prasme teiginys apie skaičių yra teisingas?

Matematikos filosofija siekia atsakyti į klausimus:

Kokia yra matematikos objektų prigimtis?

Kokia yra matematikos teiginių prasmė: ar jie yra teisingi ar nebūtinai?

Kas yra matematikos tyrimo objektas?

Ką galima pasakyti apie matematikos objektus?

Mat. objektų pavyzdžiai: natūralieji skačiai, realieji skaičiai, aibės, geometrinė tiesė, topologinė erdvė ir t.t. Kalbos dalių požiūriu šie objektai yra daiktavardžiai. Kai kurie iš mat. objektų turi tikrinius vardus: 3, π ir t.t.

Atrodo akivaizdu, kad mat. objektai neturi fizinių savybių. Nėra prasmės klausti: kiek sveria 3? ar 3 yra drąsus? Skaičiaus neįmanoma sunaikinti.

Sunkesni klausimai:

ar skaičiai buvo sukurti?

ar skaičiai priklauso nuo vietos ir laiko?

ar skaičius gali būti ko nors priežastimi ar pasekme?

Objektai, kuriems atsakymai į šiuos klausimus yra neigiami, vadinami *abstrakčiais*.

Kas yra skaičius?

Dalis filosofų (anti-realistai, nominalistai) teigia, kad *nėra* tokio dalyko kaip skaičius.

Kita dalis filosofų (realistai, platonistai) teigia, kad skaičius yra realiai egzistuojantis objektas. Jei taip, tai kokios rūšies tai yra objektas?

Kai kas mano, kad skaičius yra žmogaus sąmonės objektas (kažkas panašaus į mintis mūsų galvoje).

Kiti mano, kad skaičiai egzistuoja už mūsų sąmonės ribų.

Vienas iš seniausių požiūrių, vadinamas platonizmu, teigia, kad skaičius yra *abstraktus objektas*. Abstrakčiu vadinamas toks objektas, kuris nepriklauso nuo erdvės ir laiko. Toks objektas, jei jis egzistuoja, nėra panašus į fizinį objektą ar sąmonės objektą. Taip pat sakoma, kad abstraktus objektas neturi priežasties-pasekmės ryšių su kitais objektais (jis nėra kieno nors priežastimi ar pasekme).

Pirmosios išvados. Matematikos filosofai pirmiausia siekia kurti *semantinę* matematikos teoriją, t. y. siekiama paaiškinti matematikos teiginių *prasmę* bendrame pasaulio suvokimo kontekste.

Pavyzdžiui, viena semantinė teorija teigia, kad skaičiai yra abstraktūs objektai, kita semantinė teorija teigia, kad skaičiai yra sąmonės objektai (mintys).

Daugelis matematikos filosofijos krypčių ne tik įvardija matematikos objektus bendrame kontekste, bet ir papildo aiškinimu, kokia prasme matematikos objektai egzistuoja. Pavyzdžiui, platonistai teigia, kad matematikos objektai yra abstraktūs objektai ir papildomai teigia, kad jie realiai egzistuoja. Tokie teiginiai yra pavyzdys teorijos, kuri vadinama *ontologine*. Ontologine vadinama tokia teorija, kuri aiškina apie tai, kokia prasme egzistuoja objektai. (Pavyzdžiui, teiginys, kad egzistuoja pegasas yra klaidinga ontologinė teorija. Tuo tarpu, arklio egzistavimo teiginys yra teisinga ontologinė teorija.)

Tos matematikos filosofijos kryptys, kurios teigia, kad matematikos objektai nieko nežymi (nominalizmas), neturi ir ontologinės teorijos, nes ji visai neturi prasmės.

Tos matematikos kryptys, kurios teigia matematikos objektais esant sąmonės idėjomis taip pat nieko naujo ar neįprasto nepasako ontologine prasme,

Teorija laikytina matematikos filosofija, jei ji pasako, ką nors naujo ar kontraversiško semantine prasme.

Skirtumą tarp matematiko ir matematikos filosofo iliustruoja skirtumas tarp lietuvio, žinančio ir naudojančio savo kalbą nuo gimimo, ir užsieniečio lituanisto, bandančio sukurti lietuvių kalbos gramatiką.

Platonizmas yra nuostata, kad

(a) matematikos objektais yra savarankiškai egzistuojantys abstraktūs objektai;

(b) matematikos teiginiai yra tokių objektų teisingas apibūdinimas.

Neišvengiamumo argumentas už platonizmą (angl. indispensability argument)

Toliau formuluojami argumentai pagrindžia platonizmo poziciją. Šių argumentų autoriais yra Frege, Quine ir Putnam.

(1) Gamtos mokslai neišvengiamai grindžiami matematika, t. y. gamtos mokslai yra neįmanomi kitaip, kaip matematikos pagrindu. Ši aplinkybė ir gamtos mokslų sėkmės istorija patvirtina, kad matematikos teorijos yra teisingos. Todėl

(2) matematikos teiginiai yra teisingi ir

(3) matematikos teiginiai suvokiami tiesiogiai, kaip ir teiginiai apie fizinius objektus.

Tačiau dėl (2) ir (3)

(4) turime priimti (tikėti), kad matematikos teiginiuose minimi objektai egzistuoja;

(5) jei egzistuoja matematikos objektai, tai jie yra abstraktūs (ne fiziniai ar psichiniai).

(6) Gavome, kad egzistuoja abstraktūs matematiniai objektai ir matematikos teiginiai teisingai apibūdina šiuos objektus, t. y. galioja platonizmas.

Platonizmas neigiamas prieštaraujant vienam arba keliems iš aukščiau išvardintų punktų. Pavyzdžiui, nesutinkant su (5), teigiama, kad matematikos objektai egzistuoja bet jie nėra abstraktūs. Tokiu atveju, matematikos objektai privalo būti arba fiziniai arba priklausantys sąmonės sričiai.

Šios dvi alternatyvos atitinka dvi *realistinio anti-platonizmo* kryptis: fizikalizmą ir psichologizmą.

Nesutinkant su vienu iš trijų teiginių (4), (3) arba (2), atsiduriame *anti-realistinio anti-platonizmo* arba *nominalizmo* srityje.

Matematinis **fizikalizmas** - matematikos teiginiai apibūdina fizinių objektų savybes. Priešingai abstraktiems objektams, fiziniai objektai yra konkretūs. Pavyzdžiui, teiginys, kad $2 + 3 = 5$ reiškia, kad sudedant dvi krūvas, kurių vieną sudaro du fiziniai objektai, o kitą sudaro trys fiziniai objektai, gausime krūvą, kurią sudaro penki fiziniai objektai.

Laikant matematikos objektus fiziniais gaunamos išvados, kurios prieštarauja matematikos praktikai.

1. Jei matematikos objektas aibė yra siejamas su konkrečiu fiziniu objektu, tai kyla neapibrėžtumo problema: nėra būdu, kuris konkretų fizikinį objektą vienareikšmiškai sietų su kuria nors aibe (kiekvienas objektas gali būti traktuojamas įvairiais aspektais).

2. Fizikalizmo viena iš pasekmių yra išvada, jog matematika yra empirinis mokslas. Tai reiškia, jog matematikos teiginiai turėtų būti teisingi, jei nėra juos falsifikuojančių faktų.

3. Taip pat nėra priemonių nustatyti teisingumą matematikos teiginių, kuriuose kalbama apie aktualią begalybę.

Matematinis **psichologizmas** yra požiūris, kad matematikos objektai egzistuoja ir yra sąmonės objektai (kažkas panašaus į mintis mūsų galvoje).

Jei matematikos objektai yra sąmonės objektai, tai teiginiai išreiškiantys matematikos objektų savybes (pvz. „3 yra pirminis skaičus") yra sąmonės objektų savybės. Tai yra psichologizmo semantinė tezė. Iš jos gaunamos tokios išvados

1. matematinė tiesa priklauso nuo psichologinės tiesos (jei nėra žmonių nėra ir matematikos tiesų);

2. psichologizmas nesuderinamas su matematikos teiginiu, kad egzistuoja aktuali begalybė (pvz., galvoje nėra visos natūraliųjų skačių aibės);

3. iš psichologizmo išplaukia atitinkama samprotavimų metodologija (tikrinant ar konkreti idėja yra kieno nors mąstoma).

Matematinis **nominalizmas** yra požiūris, kad matematikos objektai yra abstraktūs, bet jie neegzistuoja. Todėl matematikos teorija **nėra** teisingas dalies pasaulio apibūdinimas. Nominalizmas sutinka, kad rinkinys sudarytas iš trijų konkrečių objektų gali egzistuoti kaip atskiras objektas ir galima mąstyti apie šio rinkinio savybę 3. Tačiau skaičius negali būti interpretuojamas, kaip atskiras objektas.

Paminėsime tris nominalizmo rūšis gaunamas neigiant anksčiau minėto Frege, Quine ir Putnam'o argumento vieną iš trijų teiginių:

(A) Fikcionalizmas, neigiant (2): matematikos teiginiai yra teisingi.

(B) Perfrazuojantis nominalizmas, neigiant (3): matematikos teiginiai suvokiami tiesiogiai, kaip ir teiginiai apie fizinius objektus.

(C) Neo-Meinongianizmas, neigiant (4): turime priimti, kad matematikos teiginiuose minimi objektai egzistuoja.

Priminsime, kad Alexius Meinong'as (1853-1920) yra austrų filosofas ir psichologas. Sukūrė „objektų teoriją", kuri sistemingai nagrinėja ne tik egzistuojančius, bet ir neegzistuojančius objektus.

Neo-Meinongianizmas bando pagrįsti požiūrį, kad yra galimi teisingi teiginiai apie neegzistuojančius objektus.

Pavyzdžiui, teiginys „3 yra pirminis skaičius" yra teisingas, bet nėra objekto vardu 3.

Problema su šia pozicija yra ta, kad jos laikantis tenka keisti žodžio „tiesa" prasmę. Laikantis standartinės žodžio „tiesa" prasmės, jei objektas X neegzistuoja, tai teiginys „X yra F" nėra teisingas.

Perfrazuojantis nominalizmas nemano, kad matematikos teiginiai turi būti suprantami tiesiogiai, t.y. taip, kaip jie suformuluoti.

Pavyzdžiui, tokie teiginiai, kaip „3 yra pirminis skaičius" privalo būti suprantami kita logine forma.

Literatūroje sutinkamos kelios skirtingos loginės formos. Viena iš jų yra forma „jei ..., tai ..." (angl. if-thenism). Šiuo atveju teiginys „3 yra pirminis skaičius" suprantamas, kaip „jei skaičiai egzistuotų, tai 3 yra pirminis skaičius".

Problema su perfrazuojančiu nominalizmu yra ta, kad jo nepatvirtina įprastinė matematikos praktika. Matematikos teiginiai suprantami ta logine forma, kuria jie yra formuluojami.

Matematinis **fikcionalizmas** neigia, kad matematikos teiginiai yra teisingi tiesiogine prasme.

Matematikos teiginiai turi būti suprantami panašiai, kaip Lewis'o Carroll'o knygos „Alisa stebūklų šalyje" istorija.

Šios nominalizmo krypties pradininkas Hartry Field'as [1980] savo požiūrį grindžia tuo, kad gamtos mokslo teorijos *gali būti* performuluotos nenaudojant matematikos. Kol kas jo bandymas tai padaryti su Newton'o dėsniu nėra realizuotas.

Aišku, kad toks matematikos vaidmens gamtos moksluose prieštarauja Quin-Putnam'o anksčiau minėtam matematikos neišvengiamumo teiginiui (1).

Klausimas apie matematikos taikomumą yra svarbi filosofinė problema, turinti keletą sprendimo variantų.

Matematikos taikymų problema: kodėl ir kaip yra įmanomas abstrakčių matematikos žinių taikymas realiam pasauliui?

Įspraudžiama realybė. Jei matematikos objektai yra aibės, tai reikia tokių aibių, kurių elementais būtų realaus pasaulio objektai, taigi ne abstraktūs objektai. Tai reiškia, jog matematiką tenka papildyti specialiais objektais, kurie aibių teorijoje vadinami "urelementais". Kadangi tie elementai nėra aibės, jų neįmanoma apibrėžti ir todėl jų statusui nusakyti reikia naujų aksiomų.

Abstraktūs modeliai. Galima atsiriboti nuo tiesioginio sąlyčio su realiu pasauliu kuriant konkrečių reiškinių matematinį modelį, matematikos objektams suteikiant *interpretacijas*. Toks modelis tampa lygiaverte matematine teorija. Šios „taikymo" teorijos išvados taikomos realiam pasauliui.

Tarpininkai. Matematika nėra taikoma tiesiogiai realaus pasaulio objektams, bet per tarpininkus - kitus gamtos ir socialinius moklus. O šie norėdami remtis matematika privalo įsivesti abstrakcijas. Tokiu būdu taikymo problema perkeliama į kitą sritį.

Argumentas prieš platonizamą

($E1$) žmogus yra dalis pasaulio, nusakomo erdve ir laiku;

($E2$) jei egzistuoja abstraktūs matematikos objektai, tai jie nėra dalis pasaulio nusakomo erdve ir laiku;

($E3$) jei egzistuoja abstraktūs matematikos objektai, tai būdami skirtingame pasaulyje jie nėra pažinūs žmogui;

($E4$) jei galioja platonizmas ir ($E3$), tai žmogus negali turėti matematikos žinių;

($E5$) žmogus turi matematikos žinias;

($E6$) dėl ($E4$) ir ($E5$) platonizmas nėra teisinga pozicija.

Tai yra stipriausias argumentas prieš platonizmą. Čia aptariamas *Paul*o *Benacerraf*o (1973; Mathematical truth) pasiūlytas argumento variantas.

Svarbiausias tarp šių teiginių yra $(E3)$ (*jei egzistuoja abstraktūs matematikos objektai, tai būdami skirtingame pasaulyje jie nėra pažinūs žmogui*). Jam esant teisingam, $(E6)$ išvada gaunama logiškai. $(E3)$ nėra besąlyginė teiginių $(E1)$ ir $(E2)$ išvada. Teiginiai $(E1)$ ir $(E2)$ sukuria $(E3)$ teiginio galimybę (motyvaciją) ir taip pat yra kvestionuojami. Todėl $(E3)$ gali būti vertinamas ir kaip sprendimo reikalaujanti užduotis platonizmui. Užduotis parodyti, kaip neturint tiesioginio ryšio su abstrakčių objektų sritimi galima įgyti žinias apie juos kitais būdais, buvo ir yra sprendžiama daugelio filosofų (Quine [1951], Steiner [1975], Parsons [1980] ir [1994], Katz [1981] ir [1998], Resnik [1982] ir [1997], Wright [1983], Lewis [1986], Hale [1987], Shapiro [1989] ir [1997], Balaguer [1995] ir [1998], Linsky ir Zalta [1995]).

Taigi, klausimas: **kaip galima įgyti žinias apie abstrakčius matematikos objektus neturint tiesioginio kontakto su jais?** Vieną iš galimų atsakymų sudaro tokia teiginių seka:

(a) matematikos teorijos yra empirinių teorijų dalis (pagrindas);

(b) empirinė teorija yra patvirtinama empirinės praktikos;

(c) empirinei praktikai patvirtinus empirinę teoriją, tuo pačiu patvirtinama visa teorija, kartu su matematikos teorijomis;

(d) tokiu būdu, neturint tiesioginio ryšio su matematikos objektais, empirinė praktika leidžia tikėti matematikos teorijos teisingumu ir abstrakčių matematikos objektų egzistavimu.

Kitas atsakymas grindžiamas prielaida, kad matematikos teorijoje svarbu ne matematikos objektai, bet jų sudaromos struktūros. Tokiu būdu struktūrai suteikiamas skirtingas statusas, laikant ją abstrakčia. Savo ruožtu matematikos struktūra yra pažini be tiesioginio kontakto su abstrakčiais objektais, tačiau konstruojant aksiomų sistemas. Aksiomų sistema laikoma netiesioginiu struktūros apibrėžimu. Šis požiūris vadinamas *struktūralizmu*, o jo autoriais yra Resnik [1997] ir Shapiro [1997].

Trečiojo požiūro, vadinamo *pilnakrauju platonizmu* (angl. full-blooded platonism), autoriais yra Balaguer [1992], Linsky ir Zalta [1995]. Trumpai šis požiūris teigia, jog „visi galimi matematikos objektai egzistuoja". Remiantis šia prielaida aiškinama, kad matematikos objektų pažinumui pakanka parodyti, kad nagrinėjama matematikos teorija yra suderinta (angl. consistent). Teorijos suderinamumo savybei įrodyti, kontaktas su matematikos objektais nėra būtinas.

Ne galutinė išvada

Svarbiausiu argumentu už platonizmą yra tai, kad nėra jam lygiaverčios alternatyvos. Platonizmas geba pakankamai gerai paaiškinti matematikos prigimtį ir jos praktiką. Tuo pačiu metu labai sunku pateisinti platonizmą ontologiniu atžvilgiu.

Pagal: M. Balaguer. Platonism and Anti-Platonism in Mathematics. Oxford University Press, 1998.

Mokslinėje literatūroje galima rasti ir kitokio pobūdžio reakcijų į platonizmo hipotezę. Pavyzdžiui, *Lakoff*o ir *Núnez*o knygoje „Iš kur atsiranda matematika" [2000] apie platonizmo, autorių vadinamo „matematikos romantika", pasekmes taip rašoma (341 pusl.): „Matematikos romantika nėra ta istorija, kuri turi tik teigiamas pasekmes. Ji gąsdina žmones." „Matematikos romantika tarnauja matematikų bendruomenei. Ji padeda palaikyti ir pateisinti elitizmą." „Matematikos romantika nėra nekaltas mitas - bent jau netiesiogiai jis prisideda prie visuomenės socialinio ir ekonominio padalinimo."

Kas yra (natūralusis) skaičius?

G. Frege atsakymas - jo knygoje „Die Grundlagen der Arithmetik", Breslau, 1884.

Terminai: objektas, sąvoka, ekstensija. *Sąvoka* yra funkcija F iš objektų rinkinio į rinkinį, kurį sudaro „taip" ir „ne". Sąvokos F *ekstensija* yra rinkinys tų objektų o, kuriems $F(o)$ yra „taip".

Apibrėžimai: Dvi sąvokos yra *ekvivalenčios*, jei tarp jų ekstensijų yra abipus vienareikšmė atitiktis. *Skaičius, atitinkantis sąvoką* F, yra sąvokos „ekvivalentus sąvokai F" ekstensija ($\approx$ ekvivalentumo klasė).

0 yra skaičius atitinkantis sąvoką „nėra sau tapatus"

1 yra skaičius atitinkantis sąvoką „lygus su 0"

2 yra skaičius atitinkantis sąvoką „lygus su 0 ar 1"

ir t.t.

Šis Frege skaičiaus apibrėžimas buvo dalis jo vykdomos programos (dabar vadinamos logicizmu): naudojant logikos sąvokas apibrėžti svarbiausias matematikos sąvokas taip, kad iš jų logiškai išplauktų visos numanomos savybės. Frege parodė, kad iš jo skaičiaus apibrėžimo išplaukia savybės, kurios dabar vadinamos Dedekindo-Peano aksiomomis. Tam tikslui (lyginti skaičius) Frege įrodė ir naudojo teiginį, kurį pavadino **Humo principu**:

Bet kurioms dviems sąvokoms F ir G, skaičius atitinkantis F yra lygus skaičiui atitinkančiam G tada ir tik tada, kai F ir G yra ekvivalenčios sąvokos.

Šio principo įrodymas rėmėsi Frege's „Basic Law V":

Bet kurioms dviems sąvokoms F ir G, F ekstensija = G ekstensijai tada ir tik tada, kai $\forall o(F(o) = G(o))$.

Šios prielaidos pasekmė - B. Russell'o paradoksas.

Tolesni įvykiai parodė, kad logicizmo programa neįgyvendinama.

Neo-logicizmas C. Wright [1983], B. Hale [1987], Wright and Hale [2001] parodo, kad yra vilties atgaivinti Frege programos esmę: apibrėžti svarbiausias matematikos sąvokas taip, kad iš jų logiškai išplauktų visos numanomos savybės. Šiame apibrėžime gali būti naudojamos ne logikos sąvokos ir prielaidos.

Būtent, Humo principas pakečiamas apibrėžimu:

Bet kurioms dviems sąvokoms F ir G, skaičius atitinkantis F yra lygus skaičiui atitinkančiam G, jei F ir G yra ekvivalenčios sąvokos.

Šis Humo principas nėra logikos tiesa. Naudojant tik šį apibrėžimą įrodoma *Frege's teorema*: Jei galioja Humo principas, tai egzistuoja natūralieji skačiai, jų yra be galo daug ir jiems galioja Dedekindo-Peano aksiomos.

P.S. Jei neo-logikas mano, kad Humo principas yra objektyviai teisingas, tai jis yra ir platonistas.