Matematika, žinių sistema, tirianti tokias sąvokas, kaip dydis, erdvė, struktūra ir kitimas. Matematikos sąvokų turinys vystėsi bandant suprasti realaus pasaulio kiekybinius santykius ir erdvines formas. Pasitelkiant šias ir kitas sąvokas, formuluojamos hipotezės ir siekiama nustatyti jų teisingumą. Tam yra naudojamos aksiomos, apibrėžimai, anksčiau įrodyti teiginiai ir loginė dedukcija.

Matematikos kintamumas. Matematika yra nuolat kintanti žinių sistema. Kintanti tiek savo turiniu, tiek ir naujų žinių kaupimo metodais. Matematikos evoliucijoje išskiriami keturi pagrindiniai etapai. Pirmasis iš jų, apimantis laikotarpį nuo seniausių žinomų rašytinių šaltinių iki 6-5 a. pr.Kr., vadinamas matematikos atsiradimu. Manoma, kad matematikos atsiradimas sietinas su žmogaus gebėjimu skaičiuoti aplinkos daiktus. Gebėjimas įžvelgti tai, kas yra bendro tarp bet kurių dviejų daiktų, reiškė naujos kokybės objekto – skaičiaus du – suvokimą ir naudojimą. Skaičiuojamais tampa ne tik tikrovės daiktai, bet ir tokios abstrakcijos, kaip laikas - dienos, metai ir t.t. Šie žmogaus gebėjimai formuluojami ir patys tampa tyrimo objektais, formuojantis žinių sistemai vadinamai aritmetika. Dar kitos rūšies žmogaus suvokimo objektais tampa erdvinės formos. Kiek tos formos suvokiamos idealizuotai ir atsietai nuo tikrovės, tiek jos tampa naujos žinių sistemos srities – geometrijos – tyrimo objektu.

Antrasis matematikos vystymosi etapas, apimantis laikotarpį nuo 6-5 a. pr.Kr. iki 16 a., vadinamas senovės matematika. Skirtingai nuo ankstesniojo etapo, matematika formuojasi kaip teorinė žinių sistema. Senovės graikų mokslinėse ir filosofinėse mokyklose formavosi teoriniai matematikos pagrindai. Jau Pitagoro mokykloje pastebimas abstrakčių matematikos faktų kaupimas ir jų jungimas į teorinę sistemą. Aritmetikos kontekste formuojasi skaičių teorija, sudarydama savarankišką matematikos sritį. Vienas iš svarbiausių tuo metu nustatytų faktų yra skaičiaus $\sqrt{2}$ iracionalumas. Senovės matematikos aukso amžius siejamas su Euklido *Pradmenų* sukūrimu (apie 300 pr.Kr.). Šiame veikale buvo surinktos ir susistemintos pagrindinės geometrijos žinios. Jau šiuo laikotarpiu buvo naudojamas toks išskirtinis matematikos bruožas, kaip teiginio įrodymas, grindžiamas aksiomomis ir dedukcija. Antras svarbiausias susistemintas senovės matematikos žinių kūrinys yra Ptolemajaus *Almagestas* (apie 150 m.). Šio veikalo autorius susistemino ir toliau išplėtojo graikų astronomijos žinias ir jos matematinius metodus. Nepriklausomai nuo graikų civilizacijos, kitokia kryptimi matematika buvo vystoma tarp to meto arabų, indų ir kitų rytų šalių kultūrų. Vakarų kultūrai ši matematika tapo žinoma viduramžiais ir vadinama algebros vardu.

Trečiojo matematikos vystymosi etapo, vadinamo klasikine matematika, pradžia siejama su R. Descartes‘o pastangomis apjungti geometriją ir algebrą, bei ribos skaičiavimo metodo išplitimu to meto analizėje. Svarbiausiais šio matematikos vystymosi etapo rezultatais yra I. Newton‘o ir G. Leibniz‘o sukurta matematinė analizė, diferencialinės ir integralinės lygtys, specialiosios funkcijos esančios tokių lygčių sprendiniais, begalinių eilučių ir sandaugų metodų panaudojimas, kompleksinio kintamojo funkcijų teorijos sukūrimas, bei ekstremumo problemų sprendimai. Klasikinės matematikos etapo pabaigą žymi gilus skaičių teorijos išsivystymas, vektorinių erdvių ir matricų teorijos sukūrimas, tikimybių teorijos elementų bei neeuklidinės geometrijos atsiradimas.

Dabartinis, ketvirtasis matematikos vystymosi etapas prasidėjo beveik kartu su 20-uoju amžiumi ir yra vadinamas šiuolaikine matematika. Kokybinį šio etapo skirtingumą nuo klasikinės matematikos žymi abstrakcijos ir samprotavimų griežtumo lygio pasikeitimas. Matematikos abstraktumą iliustruoja siekimas suprasti matematinius objektus siejančias struktūras, tokių struktūrų klasifikavimas ir jų savybių tyrimas. Matematikos tyrimo objektais tampa tokios struktūros, kaip abstrakčios algebros (grupės, žiedai, laukai), topologinės erdvės, simbolinė logika, funkcinė analizė ir mišrūs tokių struktūrų dariniai (pavyzdžiui, algebrinė geometrija ir topologinės grupės). Greta kokybinio matematikos turinio pasikeitimo, pastaraisiais dešimtmečiais stebimas nepaprastas kiekybinis šio turinio augimas. Dėl šios priežasties tampa neįmanomu vienam žmogui bent kiek giliau suprasti visą matematiką ir dauguma matematikų yra tik savo srities specialistais.

Matematikos vieta žinių sistemoje. Matematika turi mokslo, kalbos ir meno požymių toliau aptariama prasme. Matematika yra tiek mokslas, kiek ji prisideda kaupiant žinias apie gamtą, visuomenę ir patį pažinimą. Nei gamta, nei visuomenė nėra tiesioginiais matematikos tyrimo objektais. Matematikos objektų santykis su tikrove ir jų prigimtis yra nagrinėjami matematikos filosofijoje.

Matematikos išskirtinumą žinių sistemoje rodo ne tik jos tyrimo objekto ypatingumas, bet ir jos taikomi tyrimo metodai. Matematikos teiginys yra teisingas ir vadinamas teorema, jei jis įrodomas, t. y. logiškai išvedamas iš anksčiau įrodytų teiginių ir aksiomų remiantis dedukcija. Skirtingai nuo gamtos mokslo teiginių, eksperimentas negali falsifikuoti matematikos teiginį. Matematikos dedukcinis-aksiominis metodas ne visada turėjo vienodą prasmę. Senovės matematikoje aksiominis metodas buvo naudojamas susisteminti konkrečias empirines žinias parenkant pirmines sąvokas ir keletą svarbiausių principų (aksiomų) iš kurių dedukcijos būdu išvedami visi kiti teiginiai. Be to, pirminių sąvokų, pavyzdžiui, taško ir tiesės atveju Euklido *Pradmenyse,* atitinkama interpretacija ir turinys yra laikomi žinomais prieš formuluojant aksiomas. Tuo tarpu šiuolaikinėje matematikoje, teorijos pirminės sąvokos laikomos neapibrėžtomis ir beprasmėmis; atitinkamą interpretaciją ir turinį joms suteikia tik aksiomos. Pirmasis šį požiūrį nuosekliai pradėjo taikyti D. Hilbert‘as, 1899 metais pasiūlęs šiuolaikinę geometrijos aksiomatizaciją.

Šiuolaikinėje matematikoje dedukcinio-aksiominio metodo taikymas nėra siejamas su jokia egzistuojančia žinių ar faktų sistema; dedukcijos būdu, be jokios nuorodos į kokią nors prasmę, iš aksiomų išvedami teiginiai sudaro vadinamąją formaliąją sistemą. Formaliosios sistemos korektiškumo požymiu laikomas jos neprieštaringumas, t. y. neįmanoma įrodyti du teiginius iš kurių vienas prieštarauja kitam. 20 amžiaus pradžioje D. Hilberta‘s suformulavo programą, kurią įgyvendinus, visai matematikai būtų suteikiamas aksiominis pagrindas. Tačiau 1931 metais K. Gödel‘is įrodė, kad bet kurios, pakankamai sudėtingos formaliosios sistemos neprieštaringumas yra neįrodomas tos sistemos priemonėmis. Be to, jei pakankamai sudėtinga formalioji sistema yra neprieštaringa, tai joje egzistuoja neįrodomų teiginių. Gödel‘io rezultatai liudija apie principinį matematikos neišsemiamumą.

Formalus loginis korektiškumas yra labai silpnas reikalavimas vertinant matematiką, kaip žinių sistemos dalį. Šiuo požiūriu yra svarbus reikšmingumo klausimas: ar abstrakti teorija yra iš principo realizuojama? Kitaip kalbant, ar įmanoma pirmines sąvokas pakeisti tokiomis netuščią turinį turinčiomis sąvokomis (matematiniais objektais), kad visi dedukcinės-aksiominės teorijos teiginiai tampa teisingais teiginiais. Tokia sąvokų interpretavimo galimybė vadinama abstrakčios teorijos realizavimu, arba modeliu (logikos prasme). Antra vertus, abstrakčios teorijos modelio egzistavimas yra tos teorijos neprieštaringumo įrodymas. Šio abstrakčios teorijos reikšmingumo klausimo sprendimas tapo viena iš matematikų veiklos krypčių; A. Tarski pasiūlyta tiesos samprata buvo vienas iš pirmųjų ir svarbiausių rezultatų.

Dedukcinis-aksiominis matematikos metodas yra tampriai susijęs su matematikoje vartojamos kalbos griežtumu. Tuo siekiama išvengti klaidingų teiginių, besiremiančių galimai klaidinga intuicija ar dviprasmiškomis sąvokomis. Skirtingai nuo bendrinės kalbos, matematikoje vartojamų sąvokų turiniai apibrėžiami vienareikšmiškai. Be to, matematikoje naudojama simbolika turi griežtą sintaksę, kuri įgalina labai glaustai išreikšti didžiulį informacijos kiekį, panašiai, kaip muzika išreiškiama natomis naudojant savąją sintaksę. Dėl šių priežasčių, norint įsisavinti šiuolaikinę matematiką, reikalingos nuoseklios ir gilios studijos. Tačiau taip buvo ne visada. Beveik visa pastaruoju metu naudojama matematinė terminologija ir simbolika atsirado tik po 16-ojo amžiaus. Iki tol matematika iš esmės naudojo bendrinę kalbą ir galėjo būti įsisavinama nesunkiai ir savarankiškai.

Matematikoje vartojamos kalbos griežtumas skiria ją nuo bet kurios kitos žinomos kalbos. Tačiau matematiką galima laikyti savotiška kalba dar viena prasme. Beveik visi gamtos ir visuomenės mokslai naudoja matematiką kaip priemonę, formuluojant savo problemas ir pagrindžiant jų sprendimo tikėtinumą. Kitaip tariant, matematika tampa priemone, kurios pagalba reiškiami ir nagrinėjami realaus pasaulio faktai. Pačioje matematikoje ši aplinkybė atsispindi naudojant jos neretai sąlyginiu dalinimu į grynąją matematiką ir taikomąją matematiką. Toks dalinimas grindžiamas sprendžiamų problemų motivacija. Klasikinėje matematikoje dauguma to meto naujųjų teorijų atsirado bandant išspręsti vienas ar kitas problemas susijusias su praktiniais uždaviniais. Tačiau šiuolaikinėje matematikoje dauguma joje dominuojančių sričių atsirado bandant spręsti klausimus kylančius pačioje matematikoje.

Dar vienas bruožas skiriantis taikomąją matematiką nuo grynosios matematikos yra kriterijus, kuriuo remiantis vertinami nauji vienos ar kitos srities matematikos rezultatai. Taikomosios matematikos rezultatas vertinamas pagal tai, kiek jis yra naudingas, siekiant paaiškinti tiriamąjį kurios nors srities reiškinį. Tuo tarpu grynojoje matematikoje naudingumo kriterijų dažniau pakeičia vertinimas grindžiamas teiginio įrodymo elegantiškumu, ar visos teorijos vidiniu grožiu. Grynojoje matematikoje yra vertinamas teiginio paprastumas ir jo bendrumas. Šia prasme matematika turi meno požymių. Elegantiško įrodymo pavyzdžiu dažnai nurodomas Euklido *Pradmenyse* esantis įrodymas, kad egzistuoja be galo daug pirminių skaičių.

Nors ir būdamos minėta prasme skirtingos, taikomoji matematika ir grynoji matematika savo teiginių įrodymo griežtumu nesiskiria. Dažniausiai taikomosios matematikos teorija išsiskiria tuo, kad jos sąvokos ir terminai yra interpretuojami priklausomai nuo tą teoriją naudojančios mokslo krypties poreikių. Pati taikomosios matematikos teorija yra vadinama matematiniu modeliu. Kadangi griežtumo prasme matematika yra vieninga, tai vienoje srityje sukurtas matematinis modelis, gali būti lygiai taip pat sėkmingai panaudotas kitoje, gal būt tik keičiant sąvokų interpretaciją.

Matematikos sritys. Pagrindinės matematikos sritys išsirutuliojo dar senovės matematikoje, priklausomai nuo žmogaus veiklos pobūdžio: skaičiavimo, žemės matavimo, komercijos, bandymų numatyti astronominius įvykius bei dangaus kūnų judėjimą ir panašiai. Visa ši veikla stimuliavo minėtųjų svarbiausių matematikos sąvokų – dydis, erdvė, struktūra ir kitimas – tyrimą ir atitinkamų matematikos sričių – aritmetika, geometrija, algebra ir analizė – vystymąsį. Greta šių pagrindinių matematikos sričių šiuolaikinėje matematikoje yra daugybė tarpinių sričių, įvairiai susijusių tarpusavyje ir su tokiomis naujomis sritimis, kaip logika, aibių teorija (matematikos pagrindai), kitų mokslų poreikiams tarnaujančiomis sritimis (taikomoji matematika) ar matematiniu neapibrėžtumo tyrimu (statistika, tikimybių teorija).

Su dydžiu matematikoje siejamos keletas skirtingų sąvokų. Paprasčiausiu atveju tai yra natūralusis skaičius. Savo ruožtu, natūraliojo skaičiaus sąvokos turinio apibūdinimas ilgą laiką buvo grindžiamas nuorodomis į žmogaus praktinę veiklą ir intuiciją. Logika grindžiamą natūraliojo skaičiaus sampratą pirmą kartą pasiūlė G. Frege 1884 metais. Tuo tarpu 1888 metais R. Dedekind‘as apibūdino natūraliųjų skaičių sistemą kaip visumą, išskirdamas esmines jos savybes. Tačiau tai nesutrukdė gilius faktus apie skaičius atrasti senovės matematikos vystymosi etape, dar tik formuojantis skaičių teorijos pagrindams. Iki šiol skaičių teorijoje egzistuoja paprastai formuluojamos, tačiau vis dar neįrodytos hipotezės (pavyzdžiui, pirminių dvynių hipotezė, Goldbach‘o hipotezė). Ilgą laiką (virš 300 metų) išsilaikė neįrodyta paskutinė arba didžioji Ferma teorema. Šią garsiąją problemą 1995 metais teigiamai išsprendė A. Wiles‘as.

Su dydžio sąvoka susijusi ir aktualiosios begalybės sampratos problema, kurią 19 amžiaus pabaigoje išsprendė R. Dedekind‘as ir G. Cantor‘as sukurdami aibių teorijos pagrindus. Pirmasis iš jų pasiūlė aibę vadinti begaline, jei egzistuoja bijekcija (abipus vienareikšmė funkcija) tarp tos aibės ir kurio nors jos poaibio nesutampančio su visa aibe. Cantor‘as pasistūmėjo dar toliau, naudodamas tą pačią bijekcija, jis įvedė tvarką tarp begalinių aibių ir įrodė, kad natūraliųjų skaičių aibė jo prasme yra mažesnė už realiųjų skaičių aibę. Klausimas, ar tarp šių dviejų aibių egzistuoja trečia skirtinga aibė, pasirodė labai sunkiu, ir Cantor‘o spėjamas neigiamas šio klausimo atsakymas yra žinomas kontinuumo hipotezės vardu. Aibių su tam tikromis savybėmis egzistavimo ar neegzistavimo klausimai pareikalavo griežtesnio – aksiominio aibės sąvokos apibrėžimo. 20 amžiaus pradžioje buvo pasiūlyta keletas aibių teorijos aksiomų sistemų. Vienos iš jų autoriumi yra E. Zermelo; jo aksiomų sistema su tam tikromis modifikacijomis, vadinama ZFC aksiomų sistema, yra pripažinta daugumos matematikų kaip pagrindinė. Beveik visi matematikos teiginiai išvedami iš aibių teorijos ZFC aksiomų sistemos. 1940 metais K. Gödel‘is ir 1963 metais P.J. Cohen‘as įrodė, kad aibių teorijos ZFC aksiomų sistemoje kontinuumo hipotezė yra neišsprendžiama.

Ilgą laiką senovės matematikai manė, kad praktiniams tikslams pakanka (teigiamų) racionaliųjų skaičių, išreiškiamų dviejų natūraliųjų skaičių santykiu. Tai, kad stačiojo trikampio įstrižainė gali būti neišreiškiama racionaliuoju skaičiumi sukėlė vadinamąją pirmąją krizę matematikoje ir privertė papildyti dydžio sampratą realiuoju skaičiumi. Vėliau prie skaičių sistemos buvo prijungtas nulis ir neigiami skaičiai. Galiausiai dėl vidinių matematikos poreikių, siekiant parodyti, kad tam tikros lygtys turi sprendinius, skaičių sistema buvo papildyta kompleksiniais skaičiais. Siekiant pagrįsti šiuos ir kitus atradimus 19-ame amžiuje imtasi įvairių skaičių sistemų aksiomatizavimo klausimų sprendimo. Tačiau pagrindiniais skaičių teorijos klausimais liko problemos susijusios su natūraliaisiais skaičiais, dažniausiai pirminiais. Pasikeitė tik metodai, kuriais bandoma spręsti problemas; joms spręsti pasitelkiama beveik visa šiuolaikinė matematika. Geriausiai žinomas pavyzdys yra vis dar neišspręsta Riemann‘o hipotezė.

Erdvės tyrimas senovės matematikoje atsispindi to meto geometrijoje, kuri šiais laikais vadinama euklidine geometrija. Tuo tarpu to meto trigonometrija jungė erdvės ir dydžio tyrimą; to iliustracija galėtų būti garsioji Pitagoro teorema. Šiuolaikinis erdvės tyrimas apibendrina ankstesnes idėjas skirtingomis kryptimis. Pavyzdžiui, daugiamatė geometrija tiria vektorių erdvę, kurios elementais yra bet kokio ilgio skaičių rinkiniai. Tokios erdvės geometrinės formos apibrėžiamos abstrakčiai, kaip lygčių sprendiniai, gali būti sunkiai interpretuojamos realioje tikrovėje. Šis perėjimas nuo trijų matavimų erdvės tyrimo prie bet kokio matavimo erdvės, iliustruoja vieną iš kelių šiuolaikinės matematikos bruožų – nagrinėjamos matematinės erdvės dimensijos augimą. Neeuklidinė geometrija tiria tokias erdves, kurioms nebūtinai galioja intuityviai suvokiamos euklidinės erdvės aksiomos. Dydžio ir erdvės tyrimas įvairiais aspektais šiuolaikinėje matematikoje atsispindi tokiose srityse, kaip analizinė geometrija, diferencialinė geometrija ir algebrinė geometrija.

Tačiau neabejotinai didžiausią įtaką visai 20-o amžiaus matematikai padarė topologijos atsiradimas. Vaizdžiai kalbant, geometrinės figūros topologinė transformacija yra tokia jos deformacija, dėl kurios neatsiranda nei plyšių, nei persidengimų. Topologinė transformacija nekeičia daugelį kokybinių geometrinių savybių, t. y. tos savybės yra topologiniai invariantai. Kita vertus, topologinė transformacija įgalino matematikus tirti globaliąsias matematinių objektų savybes. Neretai, lokaliųjų ir globaliųjų savybių tyrimo tendencijos laikomos vienu iš skiriamųjų bruožų tarp klasikinės ir šiuolaikinės matematikos. Dar svarbiau yra tai, kad topologinio invarianto idėja pasirodė naudinga daugelyje kitų matematikos sričių. Topologinės transformacijos idėjos svarbos suvokimas priskiriamas H. Poincaré, kurio hipotezė apie topologinių invariantų skaičių daugiamatėse erdvėse susilaukė didžiulio matematikų dėmesio.

Geometrinės figūros topologinės transformacijos idėja buvo apibendrinta topologinės erdvės sampratoje. Atvirosios aibės sąvoka topologinėje erdvėje apibendrino įprastinę funkcijos tolydumo savybę. Kartu su topologine erdve, labai vaisingomis pasirodė struktūros su papildomomis savybėmis. Pavyzdžiui, metrinės erdvė struktūra natūraliai apibendrina euklidinės erdvės atstumo savybę.

Struktūros sąvoka matematikoje siejama su matematinių objektų vidiniais sąryšiais. Pavyzdžiui, aritmetinę struktūrą apibrėžia veiksmai tarp skaičių aibės elementų. Struktūros tyrimas reiškia sąryšių bei operacijų klasifikavimą ir jų savybių nagrinėjimą, atsiribojant nuo konkrečią struktūrą sudarančių elementų prigimties. Algebrinių operacijų savybių tyrimas yra abstrakčiosios algebros uždavinys.

Klasikinėje matematikoje algebra buvo vadinama matematikos sritis, kurioje nagrinėjami sprendimo metodai lygčių išreiškiamų keturiomis aritmetikos operacijomis. Tiesinė ir kvadratinė lygtys yra paprasčiausi tokių lygčių, vadinamų algebrinėmis lygtimis, pavyzdžiai. Matematinės problemos formulavimas, kaip tam tikros lygties sprendinio paieška tapo vienu iš svarbiausiu visų laikų matematikos pasiekimu, palyginamu tik gal būt su pozicinės skaičiavimo sistemos sukūrimu. Bendrosios algebrinių lygčių teorijos istorija ilga ir ryški. Pavyzdžiui, 1824 metais N. H. Abel‘is įrodė, kad aukštesnio negu 4 laipsnio algebrinės lygtys bendruoju atveju neišsprendžiamos radikalais. Šiam svarbiam rezultatui įrodyti kelią atvėrė J.-L. Lagrange ir C. F. Gauss‘o darbai. Norėdamas suprasti Abel‘io rezultatą, E. Galois pastebėjo, kad kiekviena algebrinė lygtis susijusi su keitinių grupe, kurios savybės nusako tos lygties išsprendžiamumą; tuo pačiu prasidėjo naujas abstrakčių algebrinių struktūrų tyrimo etapas.

Šiuolaikinės algebros tyrimo objektu yra aibė kartu su joje apibrėžtomis algebrinėmis operacijomis tarp aibės elementų. Tokios struktūros apibrėžiamos ir tiriamos izomorfizmo tikslumu; šia prasme aibės elementų prigimtis nėra svarbi. Istoriškai pirmuoju tokios algebros pavyzdžiu yra jau minėtoji grupė – aibė su viena asociatyvia binarine operacija, turinti vienetą, o kiekvienas elementas turi atvirkštinį elementą. Grupių teorija buvo taikoma ir toliau vystoma tiek kitose matematikos srityse, tiek ir kituose moksluose. Viena iš priežasčių yra tai, kad grupė įgalina matematiškai suformuluoti labai svarbią simetrijos savybę, nepriklausomai nuo to ar tai būtų lygties šaknų simetrija, ar fizikos elementariųjų dalelių simetrija. Svarbiausi algebrų su dviem binarinėmis operacijomis pavyzdžiai yra žiedai ir laukai. Kitos algebrinės struktūros gaunamos keičiant algebrines operacijas apibūdinančias aksiomas, arba nagrinėjant aibes su papildomomis operacijomis ir/arba savybėmis. Pavyzdžiui, aritmetinė tiesinė erdvė yra vektorių aibė su joje apibrėžtom dviem operacijomis: vektorių suma ir vektoriaus sandauga iš skaičiaus.

Vienas iš svarbiausių 20 amžiaus algebros bruožų yra nekomutatyvumo aspekto svarbos didėjimas lyginant su komutatyvumu. Šios tendencijos pradininkais 19 amžiuje buvo Hamilton‘o darbai skirti kvaternionams, Grassmann‘o darbai skirti išorinėms algebroms, ir be abejonės Cayley darbai skirti matricoms. Šie ir kiti darbai pagrindė algebros su nekomutatyvia sandauga svarbą.

Kitimo sąvoka yra ne mažiau sudėtinga problema; tiesiogiai šios sąvokos turinys atsiskleidžia matematinėje analizėje, nagrinėjant funkcijas ir ribas. Iki 17 amžiaus matematinė analizė buvo atskirų ir mažai susijusių uždavinių sprendinių rinkinys. I. Newton‘o ir G. Leibniz‘o darbai apie be galo mažus dydžius laikomi savarankiško analizės vystymosi pradžia, tais laikais vadinamos be galo mažų dydžių analize. Vieninga savo metodais matematikos sritimi matematinė analizė tapo po

L. Euleri‘io, J. Lagrange‘o ir kitų matematikų darbų. Analizės pagrindas - ribų teorija - savo dabartinę formą įgijo dėka A. Cauchy 19 amžiaus pradžioje. 19-20 amžiuje pagrindinės matematinės analizės sąvokos buvo peržiūrėtos atsižvelgiant į aibių teorijos ir mato teorijos rezultatus. Pavyzdžiui, funkcija tapo tam tikru dviejų aibių Dekarto sandaugos poaibiu.

Plačiąja prasme matematinė analizė apima gana didelę matematikos dalį. Jai priskiriami diferencialinis skaičiavimas, integralinis skaičiavimas, realaus kintamojo funkcijų teorija, kompleksinio kintamojo funkcijų teorija, paprastųjų diferencialinių lygčių teorija, diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis teorija, integralinių lygčių teorija, variacinis skaičiavimas, funkcinė analizė ir kai kurios kitos matematikos sritys. Matematinės analizės metodus naudoja ir toliau vysto šiuolaikinė skaičių teorija (algebrinė skaičių teorija, analizinė skaičių teorija, diofantinė aproksimacija), bei tikimybių teorija. Jei 19 amžiaus pabaigoje tikimybiniai metodai buvo taikomi artilerijos šaudymo teorijoje ir klaidų teorijoje, tai 20 amžiuje tikimybių teorijos metodų taikymas buvo nepaprastai išplėtotas. Pasitelkiant naujai sukurtas atsitiktinių procesų teoriją ir matematinės statistikos aparatą imtasi vertinti ateities riziką ir neapibrėžtumą.

Kalbant apie 20 amžiaus tendencijas plėtojant kitimo sąvoką matematikoje, nesunkiai pastebimas didėjantis dėmesys netiesinių reiškinių tyrimui. Didelė klasikinės matematikos dalis yra iš principo tiesinė, arba remiamasi aproksimavimo tiesiniais dariniais galimybe. Iš principo netiesiniai reiškiniai yra žymiai sudėtingesni ir jais imta rimtai domėtis tik 20 amžiuje. Pavyzdžiui, diferencialinių lygčių teorijoje nepaprastai populiariais tapo du skirtingi šios teorijos aspektai, susiję su solitonais ir chaosu, išreiškiantys dvi priešingas alternatyvas. Solitonai išreiškia nepaprastai organizuotą netiesinių diferencialinių lygčių elgseną, o chaosas išreiškia visiškai neorganizuotą elgseną. Panašią tendenciją pereinant nuo tiesinių prie netiesinių metodų galima stebėti ir matematikos taikymuose. Pavyzdžiui, Maxwell‘o lygtys elektromagnetizmo teorijoje yra tiesinės. Tuo tarpu materijos struktūroje veikiančias jėgas apibūdinančios Yang‘o-Mills‘so lygtys yra netiesinės, nes jos yra Maxwell‘o lygčių matriciniai analogai, o matricų nekomutatyvumas sukuria iš esmės netiesinius reiškinius.

Matematikų organizacijos. Tarptautinė matematikos sąjunga (TMS; International Mathematical Union) yra nevyriausybinė ir pelno nesiekianti mokslinė organizacija, kurios pagrindinis tikslas – tarptautinio bendradarbiavimo matematikoje skatinimas. TMS yra Tarptautinės mokslo tarybos (International Council for Science) narė. Lietuvos matematikų draugija yra TMS narė. TMS buvo įkurta 1919 metais ir egzistavo iki 1936 metų; organizacija buvo atkurta 1950 metais. TMS organizuoja Tarptautinį matematikų kongresą (International Congress of Mathematicians) vykstantį kas keturi metai, su nedidelėmis pertraukomis, nuo 1897 metų.

Europos matematikos draugija (EMD; European Mathematical Society) įkurta 1990 metais tam, kad paremti matematikos vystymą Europos šalyse. EMD kuria tapatumo jausmą tarp Europos matematikų siekdama padėti skatinant matematikos tyrimus, sprendžiant matematinio švietimo problemas ir populiarinant matematiką visuomenėje. Taip pat draugija tarpininkauja tarp matematikų ir tų politikų Briuselyje, kurie atsakingi už mokslo finansavimą. Lietuvos matematikų draugija buvo viena iš 27 matematikų draugijų nusprendusių 1990 metais Madralin‘e netoli Varšuvos (Lenkija) įkurti EMD ir tapti tikraisiais jos nariais.

Matematikų apdovanojimai. Fields‘o medalis suteikiamas kas keturi metai Tarptautinio matematikos kongreso metu, pripažįstant gautų rezultatų svarbą ir skatinant tolesnei mokslinei veiklai. Kartais šis apdovanojimas lyginamas su Nobelio premija, nes pastaroji nėra suteikiama matematikams. Fields‘o medalis suteikiamas tik tiems matematikams, kurių amžius neviršija 40 metų. Prizo įkūrėjo Kanados matematiko J. C. Fields‘o nuomone apdovanojimas turi būti suteikiamas už: (a) sunkios problemos sprendimą ir/arba (b) naujos, matematikos taikymų ribas išplečiančios, teorijos sukūrimą. Sprendimą apie apdovanojimą medaliu priima specialus komitetas, kurį sudaro pripažinti vyresnio amžiaus matematikai ir jam paprastai pirmininkauja Tarptautinės matematikų sąjungos Prezidentas.

Fields‘o medalio laimėtojų sąrašas:
1936: L. Ahlfors (Suomija), J. Douglas (JAV)
1950:L.Schwartz(Prancūzija),A.Selberg(Norvegija)
1954:K.Kodaira(Japonija),J.-P.Serre(Prancūzija)
1958:K.Roth(JK),R.Tom(Prancūzija)
1962:L.Hörmander(Švedija),J.Milnor(JAV)
1966:M.Atiyah(JK) P.J.Cohen(JAV),A.Grothendieck(Prancūzija),S.Smale(JAV)
1970:A.Baker(JK), H.Hironaka(Japonija),S.P.Novikov(TSRS),J.G.Thompson(JAV)
1974:E.Bombieri(Italija),D.Mumford(JAV)
1978:P.Deligne(Belgija),C.Fefferman(JAV),G.Margulis(TSRS),D.Quillen(JAV)
1982:A.Connes(Prancūzija),W.Thurston(JAV),S.-T Yau (Kinija/JAV)
1986:S.Donaldson(JK),G.Faltings(V.Vokietija),M.Freedman(JAV)
1990:V.Drinfeld(TSRS),V.F.R.Jones(Naujoji Zelandija),S.Mori(Japonija),E.Witten(JAV)
1994:E.I.Zelmanov(Rusija),P.-L.Lions(Prancūzija),J.Bougain(Belgija),J.-Ch.Yoccoz(Prancūzija)
1998:R.E.Borcherds (JK), W.T.Gowers(JK),M.Kontsevich(Rusija),C.T.McMullen(JAV)
2002:L.Lafforgue (Prancūzija),V.Voevodsky(Rusija)
2006:A. Okounkov (Rusija), G. Perelman (Rusija) (atsisakė apdovanojimo),T.Tao (Australia),W.Werner (Prancūzija)

Taip pat tarptautinio matematikų kongreso metu kas keturi metai (pradedant 1982 metais) suteikiamas Rolf‘o Nevanlinna prizas už žymius pasiekimus tiriant informatikos matematinius aspektus. 2006 metais Vokiečių matematikų sąjunga kartu su Tarptautine matematikų sąjunga įsteigė Gauss‘o prizą už tuos pasiekimus matematikoje, kurie turėjo didelės įtakos technologijai, verslui, arba tiesiog kasdieniniam žmonių gyvenimui. Pirmasis Gauss‘o prizu buvo apdovanotas japonų matematikas K. Itô

Nuo 2003 metų kasmet suteikiamas Abelio prizas mokslininkui už jo darbų matematikoje svarbą. Kandidatą Abel‘io prizui rekomenduoja tarptautinis komitetas, o laimėtoją renka Norvegijos mokslų akademija. Šio prizo steigimo idėja buvo svarstoma dar prieš šimtą metų. Tačiau dėl įvairių priežasčių idėja buvo realizuota tik šiame šimtmetyje.

Abelio prizo laimėtojų sąrašas:
2003:J.-P. Serre (Prancūzija)
2004:Sir M. Atiyah (JK),I.M.Singer(JAV)
2005:P.D.Lax(JAV)
2006:L.Carleson(Švedija)
2007:S.S.R.Varadhan(JAV)

Clay matematikos institutas (Cambridge, JAV) 2000 metais paskelbė septynias matematikos problemas, pavadindamas jas tūkstantmečio problemomis, ir paskyrė kiekvienos iš problemų sprendimo autoriui 1 milijono dolerių prizą. Problemos parinktos atsižvelgiant į jų svarbą matematikai ir jų sprendimo sunkumą. Šios problemos yra: Riemann‘o hipotezė skaičių teorijoje, Poincaré hipotezė topologijoje, Hodge hipotezė algebrinėje geometrijoje, Swinnerton‘o-Dyer‘io hipotezė elipsinių kreivių teorijoje, turbulenciją apibūdinančių Navier-Stokes‘o lygčių sprendimo galimumas, kvantinės Yang‘o-Mills‘o teorijos matematinio pagrindimo paieška, bei sudėtingumo klasių P ir NP sutapimo problema informacijos teorijoje.

Kas nėra matematika. Pseudomatematika yra matematiką primenanti veikla, siekianti įrodyti garsiąsias matematikos problemas, dažniausiai nesinaudojanti pripažintomis matematikos teorijomis. Be to, tokioje veikloje dažnai vengiama laikytis matematinio griežtumo reikalavimų, vengiama naudotis tradicinėmis mokslinių darbų publikavimo taisyklėmis ir nekreipiamas dėmesys į jau publikuotus su ta problema susijusius darbus.

Matematika nėra veikla nukreipta tik į betikslį teoremų įrodinėjimą. Panašiai kaip, kad literatūra nėra vien tik gramatiškai korektiškų sakinių konstravimas.

Matematika nėra tas pats, kas buhalterija. Nors buhalterijoje aritmetiniai veiksmai yra naudojami, bet tokios veiklos tikslas yra patikrinti atliekamų veiksmų korektiškumą. Abstrakčios matematikos vystymasis neturi jokios įtakos buhalterinių skaičiavimų efektyvumo užtikrinimui.

Matematika nėra numerologija. Numerologija naudoja aritmetiką siedama vardus ir datas su skaičiais, bet emocijų ir charakterio bruožų priskyrimą skaičiams grindžia intuicija arba tradicija.