Matematinės analizės idėjų raidos atspindžiai tarpukario Lietuvoje

Rimas Norvaiša (2014 m. birželio 26 d.)

Santrauka. Matematinė analizė formavosi tiriant judėjimą, išreiškiamą priklausomybėmis tarp kintamųjų dydžių. 19 amžiuje išryškėjo bent dvi skirtingos matematinės analizės kryptys. Vienoje iš jų pirmine sąvoka yra kintamasis dydis, kuria išreiškiamas be galo mažas dydis (*A.-L. Cauchy*). Antroji kryptis grindžiama realiųjų skaičių aibe su sutvarkyta pilno lauko struktūra ir ϵ - δ ribos samprata (*K. Weierstrass*as, *R. Dedekind*as, *G. Cantor*as). Tekste nagrinėjame kaip šios kryptys atsispindi tarpukario Lietuvos (J. Stoukus, A. Juška, Z. Žemaitis) matematikos vadovėliuose.

1. Įvadas

Tekste apžvelgtas matematinės analizės idėjų aiškinimas Pirmosios Lietuvos Respublikos laikotarpiu (1918-1940 m.). Siekiama išsiaiškinti to meto Lietuvos matematikų požiūrį į matematinės analizės pagrindus ir įvertinti jo vietą matematinės analizės idėjų raidos kontekste. Trumpai supažindinus su šiuo kontekstu, toliau nagrinėjami J. Stoukous ir A. Juškos matematinės analizės vadovėliai bei Z. Žemaičio diferencialinio-integralinio skaičiavimo paskaitų konspektai. Apibendrinant šios veiklos rezultatus galima teigti, kad aptariamo laikotarpio matematinė analizė Lietuvoje iš esmės atitiko *A.-L Cauchy* 1821 metų vadovėlyje *Course d'analyse* pasiūlytą analizės pagrindų formą bet ne įrodymų griežtumą. Nesėkmingai bandyta aiškinti *K. Weierstrass*o 1861 metais pasiūlytą ribos sampratą, bei jo ir kitų matematikų įrodytas tolydžiųjų funkcijų savybes. Galima teigti, kad tarpukario Lietuvoje dėstytos matematinės analizės samprata neatitiko 19 a. pabaigoje ir 20 a. pradžioje Vakarų Europoje brendusio matematinės analizės supratimo, grindžiamo realiųjų skaičių aibe su sutvarkyta pilno lauko struktūra. Šios išvados yra naujos ir skiriasi nuo ankstesnių panašaus pobūdžio tyrimų išvadų.

Matematikos idėjų raidos konkrečioje šalyje analizė yra prasminga keliais atžvilgiais. Pirma, matematikos idėjos, būdamos pasaulio dvasinės kultūros branduoliu, gali turėti įtakos šalies mokslui ir švietimui kai rūpinamasi jų plėtra. Matematikos idėjų supratimas ir naudojimas akademinėje bendruomenėje įtakoja šalies kultūros pobūdį ir jos intelektualinio išsivystymo lygį. Matematikos idėjų raidos analizė padeda geriau suprasti dabartinę matematinės minties brandą ir išsiaiškinti savo šalies kultūros vietą bendrame pasaulio kultūrų kontekste.

Antra, šiame tekste aptariamos matematinės analizės idėjos turėjo lemiamą reikšmę šiuolaikinės matematikos formavimuisi. Analizės aritmetizacija vadinamas realiųjų skaičių aibės su sutvarkyta pilno lauko struktūra sukūrimas 19 a. pabaigoje ir tolesnis jos naudojimas pakeitė matematikos raidos kryptį ([AA], [Gray] 18 pusl.). Skaičiaus sąvokos loginis pagrindimas leido atsisakyti intuityvaus samprotavimo, nesureikšminti matematikos faktų atitikimo realiai tikrovei poreikį ir pereiti prie loginio neprieštaringumo reikalavimo matematikos žinių atžvilgiu.

Trečia, pastarojo meto nestandartinės analizės plėtra visoje matematikoje atkreipė dėmesį į *A.-L. Cauchy* darbų interpretavimo problemą ir jų reikšmę matematinės analizės idėjų raidoje ([Bair et al], [Borovik]). Be galo mažų dydžių naudojimo matematinėje analizėje klausimą diskutavo ir tarpukario Lietuvos matematikai. Pavyzdžiui, už be galo mažų dydžių naudojimą mokant matematinę analizę agitavo A. Karalius savo 1927 metų straipsnyje [Karalius]. Tuo tarpu 1935 metais O. Stanaitis siūlė atsisakyti be galo mažų dydžių naudojimo mokyklose dėl jų matematinio nepagrįstumo [Stanaitis]. Matematinio pagrįstumo atžvilgiu be galo mažų dydžių statusas pasikeitė.

Ketvirta, panašaus pobūdžio matematikos idėjų raidos tyrimai vykdomi kitose šalyse. Pavyzdžiui, ispanai nustatė [Castelao], kad *A.-L. Cauchy* pasiūlytas matematinės analizės pagrindimas jų šalyje perimtas apie 1880 metus, o perėjimas prie *K. Weierstrass*o požiūrio užtruko dar beveik 40 metų nuo 1880 iki 1914. Pastarojo straipsnio autoriai teigia, kad Europos matematikų bendruomenės perėjimas prie *A.-L. Cauchy* pasiūlyto samprotavimų griežtumo nebuvo sklandus iki pat 19 a. vidurio. Matematikos istorikas *I. Grattan-Guinness*as rašo, kad *A.-L. Cauchy* tradicijos adaptacija buvo komplikuota visose šalyse ir nėra pakankamai ištirta ([GG2000], 67 pusl.).

Minėti J. Stoukous, Z. Žemaičio ir A. Juškos darbai aptariami atitinkamai skyreliuose 3,4 ir 5. Bet prieš tai, sekančiame skyrelyje, primename labai trumpą matematinės analizės idėjų raidos santrauką ir keletą šiame tekste svarstomų sąvokų ir įrodymų iš *Cauchy Course d'analyse*. Paskutiniame 6-ame skyrelyje – išvados.

2. Matematinės analizės idėjų raida ir *Cauchy Course d'analyse*

Matematinė analizė yra plati matematikos sritis tradiciškai apimanti diferencijavimo, integravimo, mato ir kitas funkcijų tyrimui naudojamas teorijas. Šiame tekste matematinė analizė yra suprantama siaurąja prasme, kaip realaus kintamojo funkcijų teorija. Kadangi matematinė analizė nagrinėjama jos raidos kontekste, realiųjų skaičių aibės su sutvarkyta pilno lauko struktūra, funkcijų tarp tokių aibių ir jų konvergavimo tyrimą vadiname *šiuolaikine matematine analize* (sutrumpintai ŠMA). Taigi, ŠMA pirmine sąvoka yra aibė. Skaičius, funkcija, riba ir kitos ŠMA sąvokos yra išvestinės, apibrėžiamos naudojant aibių teorijos sąvokas. ŠMA pradininkais laikomi *K. Weierstrass*as (1815-1897), *R. Dedekind*as (1831-1916) ir *G. Cantor*as (1845-1918). Dar anksčiau ŠMA idėjos susiformavo Bohemijos matematiko *B. Bolzano* (1781-1848) darbuose. Tačiau jo tekstai matematikų bendruomenei tapo žinomais tik 19 a. pabaigoje.

ŠMA yra matematinės analizės idėjų evoliucijos dabartinis etapas. Ligšiolinės idėjų evoliucijos kelias nebuvo nei tiesus, nei vienintelis. ŠMA idėjų ištakos siekia antikos laikų matematiką. Tačiau šiuolaikinio diferencialinio ir integralinio skaičiavimo atsiradimas siejamas su *I. Newton*o (1642-1727) ir *G. Leibniz*o (1646-1716) darbais. Siekdamas apibūdinti judėjimą matematiškai *Newton*as sukūrė ir naudojo geometrija pagrįstus tyrimo metodus, kurie vėliau tapo diferencialiniu ir integraliniu skaičiavimu. Jo analizės objektu buvo nuo laiko priklausantis kintamasis dydis, pavyzdžiui, kreive judantis taškas. *Leibniz*o darbo motyvacija buvo visai kita; jis siekė sukurti bet kokiam samprotavimui tinkamą universalią kalbą. Jo sukurtas diferencialinio ir integralinio skaičiavimo variantas buvo pritaikytas be galo mažiems dydžiams ir puikiai tiko įvairiems geometrijos ir mechanikos uždaviniams spręsti (žr. [GG1994], 3.2 skyrius).

Diferencialinio ir integralinio skaičiavimo idėjos 18 amžiuje buvo apibendrinamos bet kokios prigimties kintamiesiems dydžiams ir sąryšiams tarp jų, kurie buvo šiuolaikinės funkcijos sąvokos pirmtakais. Pavyzdžiui, *L. Euler*is (1707-1783) savo darbuose funkcija laikė (analizinę) išraišką, o funkcijos $f(x)$ tolydumas reiškė išreiškimą vienintele formule. 17 ir 18 amžiais matematika iš esmės buvo gamtos mokslas, jos faktų pagrindimas rėmėsi atitikimu realiems gamtoje vykstantiems reiškiniams. Svarbus buvo pats matematikos fakto atradimas, bet ne jo pagrindimas. Lyginant su antikos matematika, loginių samprotavimų griežtumas tuo metu buvo gerokai sumenkęs, dažnai pakako intuicijos ir geros vaizduotės (žr. [Grabiner1981a], [Grabiner1983]).

Matematinės analizės pagrindų paiešką skatino 1734 metais publikuota *G. Berkeley* (1685-1753) kritika [Berkeley]. Be didesnio pasisekimo analizės loginio pagrįstumo problemą sprendė daugelis matematikų: *C. MacLaurin*as (1698-1746), *J. L. D'Alembert*as (1717-1783), *L. Euler*is, *Jacob*as *Bernoulli* (1655-1705) ir kiti. Matematinės analizės pagrindimą kaip matematinę problemą pirmasis suformulavo *J.-L. Lagrange*as (1736-1813). Jo iniciatyva 1784 metais Berlyno mokslų akademija paskelbė premiją tam, kuris išspręs šią problemą. Premija buvo paskirta nors problema liko neišspręsta. Paties *Lagrange*o pasiūlytas problemos sprendimas rėmėsi originalia idėja – funkcijos išvestine taške laikyti koeficientą prie pirmojo laipsnio nario esančio tos funkcijos skleidinyje taško aplinkoje laipsnine (Tayloro) eilute. Jo nuomone, problemos sprendimas turėtų paaiškinti visus iki tol rastus matematinės analizės faktus [Grabiner1981b].

Pirmu sėkmingu darbu sprendžiant matematinės analizės pagrindimo problemą laikomas *B. Bolzano* 1817 metais publikuotas straipsnis [Bolzano]. Šio darbo tikslu buvo vienos akivaizdžios tolydinių funkcijų savybės „grynai analizinio" įrodymo paieška. Būtent, 18 amžiuje akivaizdžiu buvo laikomas faktas, kad tarp dviejų argumento reikšmių, kuriose tolydi funkcija įgyja priešingo ženklo reikšmes, egzistuoja bent viena argumento reikšmė, kurioje funkcija virsta nuliu. Šią funkcijos savybę toliau vadiname *vidurinės reikšmės savybe*. *Bolzano* įrodinėjo šią savybę remdamasis savo pasiūlyta nauja funkcijos tolydumo apibrėžtimi ir realiųjų skaičių mažiausio viršutinio rėžio egzistavimo savybe. Tačiau pastarąją savybę *Bolzano* taikė be įrodymo. Kaip minėta, matematikų bendruomenė apie jo rezultatus sužinojo gerokai pavėluotai.

Reikšmingą įtaką tolesnei matematinės analizės pagrindų paieškai turėjo 1821 metais *A.-L. Cauchy* (1789-1857) parašytas vadovėlis *Course d'Analyse* (žr. [Cauchy], [Grabiner1981a], [Grabiner1983]). Kaip ir *Bolzano, Cauchy* nuosekliai ir savaip apibrėžė pagrindines analizės sąvokas, bei naudojo jas įrodydamas akivaizdžiais anksčiau laikytus teiginius. Tarp jų buvo ir vidurinės reikšmės savybė tolydinėms funkcijoms. *Cauchy* siūlomas įrodymas pagrįstas kita, taip pat neįrodyta, realiųjų skaičių pilnumo savybe. Ne visas sąvokas įmanoma apibrėžti, neapibrėžtomis lieka pirminės sąvokos. 1821 metų *Cauchy* knygoje, vietoje anksčiau dominavusios išraiškos sąvokos, pirmine sąvoka tapo kintamasis dydis. Tuo tarpu funkcija *Cauchy* vadovėlyje yra kintamasis dydis y, priklausantis nuo kito kintamojo dydžio x, vadinamo funkcijos y argumentu. Šio skyrelio antroje dalyje suformuluosime pagrindinius *Cauchy* rezultatus.

Tarp matematikų paplitusi nuomonė, kad, ε-δ nelygybėmis grindžiamos, funkcijos tolydumo savybės apibrėžties autorius *A.-L. Cauchy*, nėra tiksli. Iš tikro, ε-δ nelygybės yra naudojamos funkcijos tolydumo kontekste kai kuriuose jo įrodymuose, bet ne sąvokos apibrėžtyje. Kaip toliau matysime, *Cauchy* tolydumo apibrėžtis grindžiama be galo mažo dydžio samprata. Kaip ir kintamasis dydis, ši sąvoka tais laikais nebuvo griežtai apibrėžiama. Tačiau tai nereiškia, kad nebuvo bandoma tai padaryti, net ir tada, kai matematinėje analizėje įsigalėjo ε-δ nelygybėmis grindžiama funkcijos konvergavimo samprata (žr. [Błaszczyk] ir [Bair et al]).

Paprastai be galo mažu dydžiu laikomas skaičius a, kuris nėra lygus nuliui ir jo absoliutinis dydis yra mažesnis už trupmeną $1/n$ su kiekvienu natūraliuoju skaičiumi n. Realiųjų skaičių aibėje nėra be galo mažo dydžio, nes jo egzistavimas prieštarauja realiųjų skaičių Archimedo savybei: kiekvienam teigiamam realiajam skaičiui r egzistuoja toks natūralusis skaičius n, kad $n > r$, t.y. natūraliųjų skaičių aibė nėra aprėžta realiųjų skaičių aibėje. Apie 1960 metus logikas *A. Robinson*as (1918-1974) įrodė, kad egzistuoja nestandartinis modelis turintis daugiau matematinių objektų už standartinį modelį, kuriems teisingi visi ŠMA teiginiai. Tarp naujų objektų, greta įprastas realiųjų skaičių savybes turinčių objektų, yra be galo mažus ir be galo didelius dydžius atitinkantys objektai. Skaičių aibės elementus nestandartiniame modelyje paprastai vadina hiperrealiaisiais skaičiais. Hiperrealiųjų skaičių aibė *R turi lauko struktūrą ir ją galima laikyti realiųjų skaičių aibės R plėtiniu, kuriame yra be galo maži ir be galo dideli dydžiai. Atsižvelgiant į šį faktą ir papildant kintamųjų dydžių reikšmių aibę hiperrealiaisiais skaičiais, galima taip interpretuoti *A.-L. Cauchy* tolydumo sampratą, kuri ekvivalenti įprastinėje realiųjų skaičių aibėje apibrėžtos funkcijos tolygaus tolydumo savybei [Smorynski]. Pastaruoju metu yra daug skirtingų be galo mažo dydžio loginio pagrindimo variantų, bet, nesiekdami pedantiško tikslumo, visus juos vadiname nestandartine analize.

Likusioje šio skyrelio dalyje aptariamos kai kurios *Cauchy Course d'analyse* sąvokos ir įrodymai.

2.1.**Kintamasis dydis**. Plačiąja prasme matematinės analizės tyrimo objektu yra *sąryšiai tarp kintamųjų dydžių* ([Jahnke], vii pusl.). Kintamasis dydis buvo pirmine sąvoka *G. Leibniz*o, *G. de l'Hôpital*io (1661-1704), ir *A.-L. Cauchy* darbuose skirtuose analizei ([Bair et al], 900 pusl.). Kitos svarbios analizės sąvokos apibrėžiamos naudojant kintamąjį dydį. *Kintamasis dydis* angliškai yra *variable quantity* (*quantity* lietuviškai *kiekis, kiekybė*). Tuo tarpu rusų kalboje turime *переменная величина* (*величина* lietuviškai *dydis*), kaip ir lietuvių kalboje. Papildomų neaiškumų šaltiniu frazėje *kintamasis dydis* yra sąvoka *dydis* (arba *kiekis* angliškai).

Šiuolaikinės matematikos kontekste žodis *dydis* yra dažnai naudojamas kaip sinonimas žodžiui *kiekybė*. Straipsnyje ([Bair et al], 900 pusl.) teigiama, kad:

> *Matematinis terminas μεγεθος (megethos) senovės graikų buvo verčiamas į lotinų kalbą kaip* ***quantitas****. Šiuolaikinėse kalbose šis terminas turi du konkuruojančius atitikmenis: anglų kalboje* ***quantity****,* ***magnitude****; prancūzų kalboje* ***quantité****,* ***grandeur****; vokiečių kalboje* ***Quantität****,* ***Grösse****. Terminas grandeur vis dar naudojamas reikšme realusis skaičius (Bourbaki 1947).* (Vertimas mano[1])

Taip yra matyt tik šiuolaikinėse kalbose, nes senovės graikai šiais žodžiais žymėjo skirtingas sąvokas. Kiekybė yra viena iš Aristotelio kategorijų. Pagal jį kiekybė (*quantity, quantum*) yra dviejų rūšių: daugė (*plurality*, *multitude*) ir dydis (*magnitude*). Tiksliau Aristotelis šiuos žodžius apibrėžia:

> ***kiekybė*** *(ποσόν poson, how much) yra tai, kas padalinama į dvi arba kelias sudedamąsias dalis ir kiekviena iš jų yra kažkuo vienu, aiškiai matomu. Kiekybė yra* ***daugė*** *jei ji suskaičiuojama, yra* **dydis** *jei ji išmatuojama. Daugė yra tai, kas potencialiai padalinama į ne tolydžias dalis, dydžiu yra tai, kas padalinama į tolydžias dalis. Dydis yra ilgis jei jo tolydumas yra vienmatis, plotis jei dvimatis, gylis jei trimatis. Tarp jų, ribota daugė yra skaičius, ribotas ilgis yra tiesė, plotis yra paviršius, gylis yra kūnas.* (Vertimas mano[2])

Aristotelis matematiką laikė mokslu apie kiekybę (*quantity*). Diskrečių dydžių nagrinėjimas yra aritmetika, o tolydžių dydžių tyrimas yra geometrija. Toks požiūris į matematiką vyravo iki 18 amžiaus. Vėliau atsirado daugybė požiūrių į matematiką ir nei vieno dominuojančio tarp jų.

Kintamasis dydis *A.-L. Cauchy* analizės pagrinduose yra pirminė sąvoka, naudojama apibrėžiant visas kitas sąvokas. Jos apibūdinimas nėra pakankamai tikslus. Būtent *Cauchy* rašė [1821]:

> *Dydį vadiname* **kintamuoju**, *jei jis gali įgyti vieną paskui kitą daugelį skirtingų reikšmių. .... Iš kitos pusės, dydį vadiname* **pastoviuoju**,....... *jei jis įgyja fiksuotą ir apibrėžtą reikšmę*. (Vertimas mano[3])

Ši *Cauchy* apibrėžtis skiriasi nuo *Euler*io sampratos, kuris kintamuoju dydžiu vadino „neapibrėžtą arba bet kokį skaitinį dydį, kuris apima visas galimas reikšmes" (cituoju pagal [Jahnke; 162]: Euler 1748). Taigi *Euler*io kintamojo dydžio samprata panaši į šiuolaikinę ir nebuvo laikoma pirmine matematinės analizės sąvoka. Kintamojo dydžio sąvokai *Cauchy* suteiktas išskirtinis bruožas yra jos dinamiškumas. Šiais laikais dinamiškumo atspalvį suteikiame implikacijai: „jei $x \to a$, tai $f(x) \to c$", bet ne šios implikacijos dalims „$x \to a$" arba „$f(x)\to c$". Tačiau *Cauchy* naudojami kintamojo dydžio atskiri atvejai – seka, dinamiškumo požiūriu panašūs į šiuolaikinį naudojimą [Jahnke; 162].

Ribos sąvoką *Cauchy* apibrėžė kintamajam dydžiui, o ne funkcijai, kaip įprasta ŠMA. Pratęsdamas aukščiau cituojamą kintamojo dydžio apibūdinimą, *Cauchy* rašo:

> *Kai kintamojo viena po kitos įgyjamos reikšmės neribotai artėja prie fiksuotos reikšmės taip, kad skirtumas tampa kaip norimai mažas, ši fiksuotoji reikšmė vadinama visu kitų reikšmių riba.* (Vertimas mano[4])

Dabar pasiruošę pateikti gal būt svarbiausią *Cauchy* sąvoką:

> *Kai kintamojo viena po kitos įgyjamos reikšmės neribotai mažėja taip, kad tampa mažesnėmis už bet kurį duotą skaičių, šis kintamasis tampa tuo, ką mes vadiname begaline mažybe, arba be galo mažu dydžiu. Šios rūšies kintamasis turi ribą nulį.* (Vertimas mano[5])

Šioje apibrėžtyje žodis „tampa“ gali reikšti, kad be galo mažas dydis nėra pats kintamasis, bet tam tikra kintamojo transformacija . Apie šią ir kitas galimas interpretacijas rašoma [Borovik] straipsnyje.

Galiausiai suformuluosime Cauchy funkcijos sampratą atskiru atveju:

> *Kai du kintamieji dydžiai yra susiję vienas su kitu taip, kad esant duotai vieno kintamojo reikšmei galima nustatyti antrojo kintamojo reikšme, laikome antrąjį kintamąjį esant išreiškiamu per pirmąjį kintamąjį, kuris tokiu atveju vadinamas nepriklausomu kintamuoju. Antrasis kintamasis išreiškiamas per nepriklausomą kintamąjį vadinamas to kintamojo funkcija.* (Vertimas mano[6])

Jei x yra nepriklausomas kintamasis, tai $f(x)$ yra jo funkcija (žr. pastabą [7]).

2.2. **Tolydžioji funkcija**. Pirmiausia šios sąvokos Cauchy variantas:

> *Tegul $f(x)$ yra kintamojo x funkcija. Tarkime, kad kiekvienai x reikšmei esančiai tarp dviejų duotų ribų, funkcija visada įgyja vienintelę baigtinę reikšmę. Jei, pradedant reikšme x esančia tarp tų ribų, prie kintamojo x pridėsime be galo mažą prieauglį α, pati funkcija įgyja prieauglį $f(x+\alpha) - f(x)$, kuris priklauso ir nuo naujojo kintamojo α ir nuo x reikšmės. Šiomis sąlygomis, funkcija $f(x)$ yra tolydi funkcija, jei su kiekviena x reikšme esančia tarp tų ribų, skirtumo $f(x+\alpha) - f(x)$ skaitinė reikšmė neaprėžtai mažėja kartu su α skaitine reikšme. Kitais žodžiais tariant, funkcija $f(x)$ yra tolydi atžvilgiu x esančio tarp duotų ribų, jei tarp tų ribų, be galo mažas kintamojo pokytis visada duoda be galo mažą pačios funkcijos pokytį.* (Vertimas mano[8])

Tai yra globalaus tolydumo samprata. Tolydumo taške Cauchy neapibrėžia. Jis pasiūlo kažką panašaus į tolydumą taško aplinkoje. Dažniausiai diskutuojami du klausimai. Pirma: Ar Cauchy tolydumas ekvivalentus tolygiam tolydumui? Antra: Ar Cauchy tolydumas yra tik supaprastintas variantas vėliau *K. Weierstrass*o pasiūlytos tolydumo sampratos, kurioje naudojami rėžiai $\varepsilon - \delta$. Būtent, 1861 m. *K. Weierstrass*as pasiūlė tokią funkcijos tolydumo sampratą ([GG1994], 321 pusl.):

> *Jei galima nustatyti tokį rėžį δ [dydžiui] h, kad visiems $|h| < \delta$, $|f(x+h) - f(x)|$ bus mažesnis už bet kurį duotą kaip norimai mažą skaičių ε, tai sakome, kad be galo maži argumento pokyčiai atitinka be galo mažus[priklausomo] kintamojo pokyčius.* (Vertimas mano[9])

Pastaruoju metu vis daugiau matematikų linkę nepritarti teigiamam atsakymui į antrąjį klausimą [Bair et al]. *Cauchy* tolydumo samprata galima interpretuoti ir kitaip. Pasinaudosime nestandartinės analizės mikrotolydumo sąvoka:

> *Tarkime, kad kintamasis x priklauso funkcijos f apibrėžimo sričiai. Funkcija f vadinama mikrotolydžia taške x, jei kintamasis x' priklauso funkcijos f apibrėžimo sričiai ir x' yra be galo arti prie x, tai $f(x')$ yra be galo arti prie $f(x)$.*

Sakoma, kad x ir x‘ yra be galo arti, jei |x-x‘| yra be galo mažas dydis ir rašoma $x \approx x'$. Hiperrealiųjų skaičių aibę žymėkime *R ir funkcijos f iš R į R tęsinį iš *R į *R žymėkime *f.
Tada teisingi du teiginiai:
Funkcija f yra tolydi taške a tada ir tik tada, kai $*f(x) \approx *f(a)$ visiems $x \in *R$ ir $x \approx a$.
Funkcija f tolygiai tolydi aibėje R tada ir tik tada, kai $*f(y) \approx *f(x)$ visiems $x,y \in *R$ ir $x \approx y$.
Tokiu būdu aibėje R apibrėžtos funkcijos tolydumas taške yra jos mikrotolydumas kai kintamieji yra realieji skaičiai, o tolygus tolydumas aibėje yra jos mikrotolydumas kai kintamieji yra visi hiperrealieji skaičiai. Pastarasis faktas rodo, kad *Cauchy* tolydumo samprata galėtų reikšti tolygų tolydumą jei kintamųjų dydžių reikšmių sritis yra praplėsta be galo mažais dydžiais.

2.3. **Tolydžiųjų funkcijų savybės**. Kaip minėta, *A.-L. Cauchy* siekė parodyti, kad pagrindinius matematinės analizės faktus galima įrodyti remiantis tiksliomis sąvokų apibrėžtimis. Iki jo daugelis tokių faktų buvo laikomi teisingais remiantis geometriniais ar fizikiniais samprotavimais, t.y. rėmėsi pojūčiais suformuota intuicija. Vienas iš tokių faktų yra tolydžiosios funkcijos vidurinės reikšmės savybė (*the intermediate value theorem*):

> *Tarkime, kad funkcija f(x) yra tolydi tarp taškų x_0 ir X. Jei $f(x_0) < 0$ ir $f(X) > 0$, tai viename ar keliuose taškuose esančiuose tarp x_0 ir X funkcija privalo būti lygi nuliui.*

Įrodydamas šį teiginį *Cauchy* nuosekliai dalino intervalą $[x_0,X]$ į pasirinktą skaičių dalių ir tarp dalinimo taškų ieškojo tų, kuriose funkcija keičia ženklą. Tokiu būdu jis gauna didėjančią seką x_k, mažėjančią seką X_k, kurios nariams teisinga $x_k < X_k$, skirtumas $X_k - x_k$ konverguoja į nulį, $f(x_k) \leq 0$, $f(X_k) \geq 0$. Remdamasis šiomis sekomis *Cauchy* daro išvadą, kad egzistuoja taškas a esantis abiejų sekų bendra riba $\lim x_k = a = \lim X_k$. Be to, remdamasis funkcijos f tolydumu įrodo, kad $f(a) \leq 0$ ir $f(a) \geq 0$, t.y. $f(a) = 0$. Pirmoji išvada yra tai, kas ŠMA vadinama realiųjų skaičių aibės pilnumu, t.y. kiekviena fundamentali seka konverguoja. Šią savybę Cauchy neįrodinėjo, o laikė ją teisinga be įrodymo. Jo nuopelnas yra tas, kad jis parodė įrodomo fakto teisingumo priklausomybę nuo šios savybės.

Daugiau komentarų vidurinės reikšmės savybės įrodymo tema yra [Dunham] knygos 80-83 puslapiuose. Cauchy įrodymo vertimas į anglų kalbą pažodžiui yra [Grabiner] knygos 167-168 puslapiuose.

3. J. Stoukous „Begalinių mažybių analizio pagrindai“

Tai Lietuvos švietimo ministerijos 1925 metais pripažintas vadovėlis aukštesniosioms mokykloms. Vadovėlio pirmasis skyrius – *Apie ribas*. Šio skyriaus pirmasis paragrafas – *Pastovieji ir kintamieji dydžiai*. Vadovėlio tekstas pradedamas taip:

> *Nagrinėdami įvairius matematikos klausimus, gauname patirti, jog vieni dydžiai niekuomet arba tiktai tam tikrame klausime nesikeičia, t. y., turi visumet tą pačią reikšmę, kiti gi gali turėti įvairių reikšmių. Pirmieji yra vadinami pastoviais dydžiais, o antrieji – kintamais.* (čia ir kitur kalba nekeista)

Kintamojo dydžio pavyzdžiu teikiamas trikampio kampo dydis galintis turėti įvairių reikšmių. Šis pavyzdys rodo, kad, skirtingai nuo *Cauchy*, kintamasis dydis nebūtinai dinaminis objektas. Pavyzdys atitinka šiuolaikinę kintamojo dydžio reikšmę. Pats kintamojo dydžio apibrėžimas, lyginant jį su *Cauchy* apibrėžtimi 2.2, taip pat neturi dinamiškumo savybių.

Antrasis pirmojo skyriaus paragrafas skirtas begalinės mažybės sampratai paaiškinti. Ši samprata beveik sutampa su tos pačios sąvokos *Cauchy* samprata.

> *Kintamąjį dydį vadina begaline mažybe (arba be galo mažu, arba be galo mažėjančiu, arba artėjančiu nuliui), jei, bekintant jam tam tikru būdu, absoliutinis jo didumas gali darytis ir likti mažesnis už bet kurį duotąjį mažą teigiamą dydį.*

Aiškindamas begalinę mažybę, Stoukus užsimena apie kintamojo dydžio „kitimo procesą“. Trečiajame paragrafe analogiškai apibrėžiama begalinė didybė:

> *Kintamąjį dydį vadina begaline didybe (arba be galo dideliu, arba be galo didėjančiu, arba artėjančiu begalybei), jei, bekintant jam tam tikru būdu, absoliutinis jo didumas gali darytis ir likti didesnis už bet kurį duotąjį didelį teigiamą dydį.*

Ketvirtas pirmojo skyriaus paragrafas skirtas veiksmams su begalinėmis mažybėmis. Tai rodo svarbą, kurią autorius suteikia begalinėms mažybėms.

Kaip ir *Cauchy*, ribą Stoukus apibrėžia kintamiesiems dydžiams ([Stoukus], 9 pusl.):

> *Jeigu kintamasis dydis, bekisdamas, artėja kai kuriam pastoviajam dydžiui taip, kad absoliutinis judviejų skirtumo didumas gali darytis ir likti begaline mažybe, tai pastovusis dydis vadinamas kintamojo riba. <....> Kintamasis dydis, kuris gali artėti nuliui, kaip savo ribai, vadinasi begalinė mažybė.*

Toliau daug dėmesio autorius skiria veiksmams su ribomis. Šių dienų požiūriu galėtume sakyti, kad šie veiksmai su ribomis atitinka tai, ką mes vadiname veiksmais su funkcijų ribomis. Tačiau Stoukus funkciją apibrėžia vėliau ([Stoukus], 24):

> *Jeigu kuriu nors du kintamuoju dydžiu taip pareina vienas nuo kito, kad bet kuriam vieno didumui atitinka tam tikras (vienas ar keli) kito didumas, tai pirmąjį vadina antrojo argumentu, o antrąjį – pirmojo funkcija.*

Tolydžioji funkcija. ([Stoukus], 28 pusl.):

> *Funkcija f(x) vadinasi netruki argumento kitimo tarpe nuo x=a iki x=b, jei ji tose ribose kiekvienai argumento reikšmei turi apibrėžtą reikšmę, ir jei be galo mažam argumento prieaugliui h atitinka ir be galo mažas funkcijos prieauglius f(x+h)-f(x).*

Ši tolydumo apibrėžtis beveik identiška *A.L. Cauchy* tolydumo sampratai. Tačiau prasmė gali skirtis priklausomai nuo be galo mažo dydžio sampratos ir nuo funkcijos argumento kitimo srities. Sprendžiant iš apibrėžimą iliustruojančių pavyzdžių, siūloma tolydumo samprata yra intuityvi. Tai iliustruoja ir toliau formuluojamos vidurinės reikšmės savybės įrodymas ([Stoukus], 29 pusl.):

> *Teorema 1. Jei funkcija f(x) yra netruki visoms argumento x reikšmėms tarp kurių nors dviejų skaičių a ir b, ir jeigu funkcijos kraštinės reikšmės f(a) ir f(b) yra priešingų ženklų, tai tarp a ir b rasis bent viena reikšmė c, kuriai funkcija virsta nuliumi, t.y., f(c) = 0.*
> *Iš tikrųjų, kadangi, duotąja sąlyga, funkcija f(x) yra netruki, kintant x-ui nuo a iki b, tad, pereidama nuo vienos savo kraštinės reikšmės f(a) prie kitos f(b), ji turi pereiti per visas reikšmes tarp f(a) ir f(b); bet kadangi, duotąja sąlyga, f(a) ir f(b) yra priešingų ženklų, t.y., viena jųdviejų yra teigiama, o kita neigiama, tai, vad., f(x) iš tikrųjų turi, bekisdama, pereiti per reikšmę, lygią nuliui. Taigi, turi būti tarp a ir b tokia c reikšmė, kuriai f(c) = 0, kas ir reikėjo įrodyti.*

Šis ,,įrodymas“ reiškia grįžimą į 18 amžių, kada intuicija arba geometrinis vaizdinys buvo pakankamas argumentas norint pagrįsti matematikos faktą. *Bolzano* ir *Cauchy* siekė sukurti tokius matematinės analizės pagrindus, kurių pagalba galima būtų atsisakyti šio intuityvaus ,,įrodymo“. Šių ir kitų matematikų 19 amžiuje išplėtoto matematinės analizės griežtumo nesimato žvelgiant į Stoukous formuluojamą funkcijos išvestinės sampratą - ji išreiškiama dviejų be galo mažų dydžių, vadinamų diferencialais, santykiu ([Stoukus], 39 pusl.).

4. Zigmo Žemaičio paskaitų konspektai ,,Diferencijalinis-Integralinis skaičiavimas“

Čia aptariami du paskaitų konspekto variantai. Pirmąjį konspektą sudaro dvi dalys: pirmoji dalis išleista 1931 metais; antroji dalis – 1935 metais. Antrąjį konspektą sudaro vienintelė dalis pažymėta 1939 metais ir vadinama II-ąja laida. Teksto gale esančiame literatūros sąraše šie darbai žymimi, atitinkamai, [ZŽ1931], [ZŽ1935] ir [ZŽ1939]. Abu konspektai pradedami determinantų teorija (apimtis 7 ir 9 puslapiai, atitinkamai). Joje paaiškinama, kaip spręsti tiesines lygčių sistemas su keliais nežinomaisiais naudojant determinantus ir keletas determinantų savybių.

1931 metų antrasis skyrius yra ,,Įvadas į begalinių mažybių analizą“ (nuo 7 iki 37 pusl.), kurį sudaro skyreliai: begalinės mažybės ir jų veiksmai; ribų dėsniai, kompleksiniai skaičiai, skaičių ansamblis. Kiti pirmosios dalies skyriai: III. Funkcijos; IV. Funkcijų diferencijavimas. Konspekto antrojoje dalyje yra 39 skyreliai nuo ,,Rolle‘o teorema“ iki ,,Diferencijalų taikymas analyzinei geometrijai“. 1939 metų konspekto turinys panašus į pirmojo, bet šiek tiek skiriasi išdėstymas ir aiškinimas.

Pagrindinė šių konspektų tyrimo išvada – matematinės analizės pirmine sąvoka yra kintamasis dydis suprantamas kaip *dinaminis* matematikos objektas. Kintamojo dydžio, begalinės mažybės ir kintamojo dydžio ribos sąvokos labai panašios į *A.-L. Cauchy* sampratas, pasiūlytas1821 metų vadovėlyje. Tą patį galima pasakyti apie funkcijos ir tolydžios funkcijos sąvokas. Tačiau tolydžiosios funkcijos vidurinės reikšmės teoremos įrodymas iš esmės remiasi geometriniu paveikslu ir neprilygsta *Cauchy* griežtumui.

4.1. *Kintamasis dydis, begalinė mažybė ir riba.*

Apie kintamuosius dydžius ir begalinę mažybę 1931 metų konspekte rašoma ([ZŽ1931],7p.):

> *Vieni dydžiai, kalbant apie kurį nors klausimą, visą nagrinėjimo laiką būna* ***pastovūs****, kiti* ***kintamieji****. Jei kintamasis dydis mažėja taip, kad jo absoliutinis didumas gali būti padarytas mažesnis už bet kokį kad ir kaip mažą teigiamą dydį, tai sakome, kad šis kintamasis dydis yra be galo mažėjantis arba tiesiog :* ***begalinė mažybė****. Kintamąjį dydį vadiname be galo didėjančiu arba* ***begalybe*** *tada, jei jo absoliutinis didumas gali būti padarytas didesnis už kaip norima didelį teigiamą dydį. Pirmuoju atsitikimu užrašome* $|\alpha| < \varepsilon$*, kur* ε *kaip norima mažas, bet vis dėl to baigtinis teigiamas dydis.*

Šiek tiek daugiau apie kintamuosius dydžius ir begalinę mažybę rašoma 1939 metų konspekte ([ZŽ1939], 23 pusl.):

> *Dydžiai arba juos reiškiantieji skaičiai yra dvejopi: pastovūs ir kintamieji. Kintamieji dydžiai žymimi x, y, z, ..., o pastovieji a, b, c, ... Kintamasis dydis gali turėti be galo daug reikšmių* $x=x_0$*,* x_1*,* x_2 *.... Visos šios kintamojo dydžio reikšmės vadinasi kintamojo reikšmių* ***ansamblis****. Gali tos reikšmės būti neribotos. Toks kintamasis dydis vadinasi n e r i b o t a s, o jei jos yra ribotos, tai kintamasis dydis vadinasi r i b o t a s. Sakysime turime ribotą kintamąjį dydį x intervale (tarpe) nuo a iki b.   a <------- x -----→ b. Tada x-so reikšmės neturi peršokti per a į kairę ir per b į dešinę.*

Šių sąvokų kontekstas yra senovės graikų kultūroje gimusi matematikos samprata, išreiškiama dydžio sąvoka (žr. antrą skyrių). Tai, kad dydis Z. Žemaičio konspekte nėra tapatinamas su skaičiumi ar tiesės tašku, patvirtina kintamojo dydžio iliustracijos. Pavyzdžiui, [ZŽ1939] 24 puslapyje esanti iliustracija vaizduoja kintamąjį dydį *x* ne kaip tašką ant skaičių tiesės, bet kaip atstumą nuo nulio O iki kurio nors taško tarp taškų A ir B:

```
      ______________x__________________

   ---|-----------------------|----------------------------------------------------------|---

      O_____a________ A  ....______________b____________________  B
```

čia a yra atstumas tarp taškų O ir A, o b atstumas tarp taškų O ir B.

Siauresniame matematinės analizės kontekste kintamasis dydis yra matematikos objektas atitinkantis dinamišką judėjimo reiškinį. Tiksliau ši sąvoka nepaaiškinama ir, šia prasme, ji yra matematinės analizės pirmine sąvoka. Jei norime šią sąvoką suprasti aptariamo laikotarpio kultūrinėje erdvėje, tai neturėtume naudoti šiuolaikinės kintamojo dydžio sampratos susijusios su aibės ir jos elemento sąvokomis.

Lyginant su 1931 metų konspektu, antrajame konspekte taip pat detaliau aiškinama begalinės mažybės sąvoka ([ZŽ1939], 24 pusl.):

Jei kintamasis dydis bekisdamas visą laiką mažėja taip, kad jo absoliutinis didumas gali pasidaryti mažesnis už kad ir kaip mažą, bet pastovų teigiamą dydį, tai toks kintamasis dydis vadinasi ***begalinė mažybė*** *t.y.* $|x| < \varepsilon$ *kur* ε *yra labai mažas. Sakysim* $\varepsilon = 0{,}000000001$ *(1 milijardinė). Jau pakankamai mažas, o jei paimtume* $\varepsilon = (0{,}000000001)^{1000000000}$ *(tai jau iš tikrųjų galėtų atrodyti, kad* ε *yra begalinė mažybė, bet juk begalinė mažybė turi būti ir už jį mažesnė, nes ji yra kintamas dydis, o* $(0{,}000000001)^{1000000000}$ *yra apibrėžtas, baigtinis skaičius, todėl jo negalime pavadinti begaline mažybe.*

Specifinė, tik kintamajam dydžiui x reikalinga sąvoka yra jo tolydus kitimas ([ZŽ1939]; 25 pusl.):

Jei turime kitimo sritį a.........x........b, ir jei visam intervale dviejų gretutinių reikšmių skirtumas yra be galo mažas, tai sakoma, kad x-as tame intervale kinta tolydiškai, t.y. $|x-x_i| < \varepsilon$ *......... (1) x gali prieiti prie* x_i *be galo arti. Bet sąlyga (1) turi būti patenkinta visuose intervalo taškuose, o jei (1) sąlyga nevisuose taškuose patenkinta, tai x-as nevisame intervale kinta tolydiškai.*

Kintamojo dydžio tolydus kitimas naudojamas apibrėžiant tolydžias funkcijas.

Toliau aptariami aritmetiniai veiksmai su begalinėmis mažybėmis. Apie ribas ([ZŽ1931], 10 p):

Jei kintamasis dydis besikeisdamas artėja kuriam nors pastoviam dydžiui taip, kad absoliutinis didumas skirtumo tarp pastovaus dydžio ir kintamojo gali būti padarytas kaip norime mažas, mažesnis už bet kokį kaip norimą mažą teigiamą dydį ε*, tada tas pastovus dydis yra* ***kintamojo riba****.*

Beveik identiška kintamojo ribos apibrėžtis yra antrajame paskaitų konspekto variante ([ZŽ1939], 36 pusl.) Papildomai, antrajame variante tuoj po apibrėžties yra toks sakinys:

Taigi, jei $|x-a| < \varepsilon$ *tai* $\lim x = a$ *arba galime ir taip išreikšti* $x = a + \alpha$ .... (1)

Toliau aptariami ribų dėsniai. Pavyzdžiui, baigtinio skaičiaus kintamųjų dydžių sumos riba yra lygi tų dydžių ribų sumai.

Skaitant konspektą lieka neaišku, kas yra skaičius. Rašoma: „Skaičių ansambliu vadiname skaičių visumą, pradedant nuo - ∞ iki + ∞“. Pasakoma, kad tarp skaičių ansamblio ir tiesės yra abipus vienareikšmė atitiktis. Paaiškinamas Dedekindo pjūvis, bet nieko su juo nedaroma ([ZŽ1939], 26 pusl.).

4.2. *Funkcija ir jos tolydumas*. Vienintelė mano pastebėta ekskursija į matematinės analizės istoriją susijusi su funkcijos samprata. Autoriaus komentaras padeda suprasti jo požiūrį ne tik į funkciją, bet ir į kintamąjį dydį, todėl pacituosiu jį pilnai ([ZŽ1939], 27 pusl.):

Funkcija matematikoje pradėjo vaidinti svarbų vaidmenį tik nuo 17 amž. Tais laikais funkcijas apibrėždavo taip: <u>funkcija yra toks kintamas dydis, kuris priklauso nuo kito kintamo dydžio (argumento) kitimo</u>. Šis apibrėžimas ir dabar dažnai vartojamas, bet jis nėra tikslus, nes mes rasime funkcijų, kurių kitimas nepareina nuo argumento kitimo, pav.

$y = \sin x + \cos x$ (1) y priklauso nuo x-so

$y = \sin^2 x + \cos^2 x$ (2) yra pastovus dydis, todėl x-ui keičiantis y nekinta.

Šis pavyzdys rodo, kad pastovusis dydis nebuvo laikomas kintamojo dydžio atskiru atveju. Tęsiu citavimą:

> *Todėl stengtasi gauti bendresnis apibrėžimas. [Įterpsiu frazę iš 1931 konspekto: Joh. Bernoulli /1667-1747/ pasiūlė L. Euler'is /1707 – 1783/ suformulavo tokį apibrėžimą.] <u>Funkcija yra matematinis reiškinys, sudarytas iš pastovių tiekybių ir laisvai kintamo x-so</u>.*
>
> *Bet ir čia yra netikslumų, nes yra funkcijų, kurios nėra išreikštos matematine formula, pav., slėgimas yra aukščio funkcija, bet jo tiksliai išreikšti negalime. Tai yra tik empirinės formulės. J.B. Fourier (1768 – 1830) davė ir galutinai ištobulino P.G. Lejeune – Dirichlet (1805 – 1859) tokį apibrėžimą: <u>Funkcija yra dydis, kurio reikšmių eilei, atitinka kitos tiekybės reikšmių eilė taip, kad kiekvienai pirmos eilės reikšmei atitinka viena arba kelios antros tiekybės reikšmės</u>.*
>
> *Jei funkcijos argumentas kinta intervale nuo a iki b, o pati funkcija nuo A iki B, tai pagal šį apibrėžimą susidaro tokios dvi skaičių eilės*
>
> $a \;.\; x_0 \;.\; x_1 \;.\; x_2 \;.\; x_3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; x_n \;.\; b$
>
> $A \;.\; y_0 \;.\; y_1 \;.\; y_2 \;.\; y_3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; y_n \;.\; B$
>
> *Tada kiekvienai reikšmių iš pirmos eilės, atitinka tam tikra reikšmė iš antros eilės. (2) formulėj tos reikšmių eilės bus*
>
> $0 \;.\; x_0 \;.\; x_1 \;.\; x_2 \;.\; x_3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; x_n \;.\; \frac{\pi}{2}$
>
> $1 \;.\; 1 \;.\; 1 \;.\; 1 \;.\; 1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 1$

Šis komentaras rodo, kad kintamasis dydis ir jo reikšmė yra skirtingi dalykai; čia reikšmė yra kintamajam dydžiui priskiriamas skaičius.

Apie funkcijos tolydumą ([ZŽ1931], 47 pusl.):

> *Turime funkciją f(x), kurios argumentas kinta intervale*
>
> *a.............x............b*
>
> *Jei šiame intervale paimsime bet kokią argumento reikšmę x_i taip, kad $|x-x_i|<\varepsilon$, tai sakome, kad argumentas taške x_i kinta tolydiškai (ε – be galo mažėjantis dydis). Jei artėjant x_i prie x, ir $f(x_i)$ artės prie f(x) taip, kad galima bus padaryti $|f(x)-f(x_i)|<\eta$, kur η begalinė mažybė, tada sakoma, kad funkcija taške x_i yra tolydinė. Vadinasi, jei $|f(x)-f(x_i)| < \eta$, kai $|x-x_i| < \varepsilon$, tada funkcija tolydiška. η – laisvai parinkta begalinė mažybė, o ε tam tikra, nustatyta ir, būtent, nustatyta taip, kad funkcijos prieauglis būtų mažesnis*

už η, taigi ε = φ (η). Jei funkcijai šias normas galima taikyti kiekviename taške, tada funkcija yra tolydiška visame intervale.

Čia apibrėžtas funkcijos tolydumas taške x_i leidžiant tam taškui artėti prie (kintamojo) *x*. Antrame paskaitų konspekto variante ši sąvoka apibrėžiama šiek tiek kitaip ([ZŽ1939], 52 p.):

> *Turime funkciją f(x), kuri kinta intervale nuo a iki b. a..............x.............b. x-as gali pereiti visas reikšmes nuo a iki b, bet pati funkcija f(x), x-sui kintant, tame intervale gali labai keistis. Jei paimsime tam tikrą argumento reikšmę x_i ir jį laikysime pastoviu, tai pati funkcija $f(x_i)$ taip pat bus pastovi. Tokia funkcijos reikšmė vadinasi atskira funkcijos reikšmė. Jei paimsime funkciją f(x), kurios skirtumas*
>
> $$|f(x) - f(x_i)| < \eta \text{ , kai } |x - x_i| < \delta \qquad \text{..............} \text{ (a)}$$
>
> (*kur η ir δ yra labai maži dydžiai*), *tai funkcija taške x_i yra tolydinė. Gi jei* (a) *sąlygos yra patenkinamos visame intervale nuo a iki b, tai sakoma, kad funkcija yra tolydinė visame intervale. Tai yra, <u>jei funkcija intervale nuo a iki b kinta taip, kad funkcijos prieauglius</u> $|f(x)-f(x_i)| < $ <u>η absoliutiniu didumu galės tapti mažesnis už bet kaip mažą laisvai parinktą teigiamą dydį, kai argumento prieauglius</u> $|x-x_i| < \delta$ <u>absoliutiniu didumu mažesnis už tam tikrą pakankamai mažą dydį, tai tokia funkcija yra tolydinė (stetige funktion).</u>*

Galima sakyti, kad ši funkcijos tolydumo apibrėžtis atitinka *K. Weierstrass*o tolydumo sampratą.

4.3. Tolydinių funkcijų savybės. Abiejuose konspekto variantuose yra tos pačios toliau formuluojamos trys teoremos. Teoremų formulavimai skiriasi nedaug. Teoremų įrodymai pilnesni antrajame konspekto variante. Be to, antrajame variante yra ketvirta teorema, kurios nėra pirmajame variante. Todėl komentuojame antrąjį variantą [ZŽ1939], 56-58 puslapiai.

> I *<u>Teorema. Jei funkcija f(x) intervale nuo a iki b yra tolydinė, tai ji yra baigtinė visame intervale</u>.*

Keistas teiginys, nes tekstas ligi šios vietos neleido įtarti, kad kintamasis dydis gali įgyti begalinę reikšmę. Įrodymui naudojamas prieštaros radimas. Bet, minėtas tolydumo apibrėžimas, kai kintamasis dydis įgyja begalybę, yra nekorektiškas. Todėl įrodymo argumento necituoju.

Kitai teoremai suformuluoti ir įrodyti reikalingos sąvokos – „funkcijos maximalinė ir minimalinė reikšmė (riba)" ([ZŽ1939], 54 pusl):

> *Funkcija bekisdama gali didėti, mažėti ir vėl didėti ir t.t. Tada sakoma, kad funkcija virpa. Funkcijos virpėjimas intervale nuo a iki b bus skirtumas tarp maximalinės ir minimalinės to intervalo funkcijos reikšmės.*

(brėžinyje pavaizduota tolydžios funkcijos grafikas pažymint dvi reikšmes $f(x_k)$-$f(x_i)$ = *p*)

> *Visų kitų šio intervalo reikšmių skirtumas turi būti mažesnis už p, arba kartais ir lygus p. Jei imsime be galo artimas funkcijos reikšmes, tai ir funkcijos virpėjimas bus be galo mažas, žinoma, jei funkcija yra tolydinė. Maximalinė duoto intervalo reikšmė vadinasi*

limes superior (aukštutinė riba) ir žymima $\overline{f(x)}$, *o minimalinė reikšmė vadinasi limes inferior (žemutinė riba) ir žymima* $\underline{f(x)}$. *Tada funkcijos virpėjimas gali būti išreikštas*

$$\overline{f(x)} - \underline{f(x)} = p.$$

Tikėtina, kad norima apibrėžti kažką panašaus į tai, ką ŠMA vadina „mažiausiu viršutiniu rėžiu“ ir „didžiausiu apatiniu rėžiu“. Gali būti, kad tikslaus formulavimo problemą sukelia tai, kad $f(x)$ yra kintamasis dydis (to meto prasme), o ne kintamojo dydžio reikšmė atitinkanti argumento x reikšmę (kaip suprantama ŠMA). Kita teorema primena ŠMA faktą, kad „tolydi uždarame intervale funkcija įgyja mažiausią viršutinį rėžį“, bet nesutampa sprendžiant iš toliau cituojamo įrodymo.

II *Weierstrass'o teorema. Jei funkcija f(x) yra tolydinė intervale nuo a iki b, tai ji pereina per savo maximalinę ir minimalinę ribą.*

Toliau cituojamas šios teoremos įrodymas nenaudoja realiųjų skaičių aibės pilnumo savybės, kurios reikia įrodant minėtą ŠMA faktą.

Sakysime, kad funkcijos f(x) aukštutinė riba $\overline{f(x)}$ *(limes superior) yra M kai* $x = x_i$ *ir apatinė riba* $\underline{f(x)}$ *(limes inferior) kai* $x = x_k$ *yra m, t.y.* $f(x_i) = M$ *ir* $f(x_k) = m$.

ŠMA požiūriu daugiau nėra ko įrodinėti. Bet matyt čia netinka ŠMA požiūris, dėl skirtingos kintamojo dydžio interpretacijos. Toliau cituoju įrodymą:

Prileidžiame, kad funkcija f(x) nepasiekia savo maximalinės ribos t.y. $f(x_i) \neq M$, *o tik jai artėja, t.y.* $| f(x_i) - M | < \varepsilon$. *Sudarome naują funkciją:* $g(x) = 1/(M-f(x))$ *, kuri taip pat bus tolydinė, nes M – f(x) yra tolydinė <.....> Bet vardiklis M – f(x) nevirs nuliumi, nes* $f(x) \neq M$.

Pastarajame paragrafe x neskiriamas nuo x_i . Matyt tai yra korektūros klaida.

Išeina, kad funkcija g(x) turi būti tolydinė ir taške x_i, *bet*

$g(x_i) = \frac{1}{M-f(x_i)} > \frac{1}{\varepsilon} > N$, *kur N kaip norime didelis pastovus dydis.*

Taigi išeitų, kad g(x), būdama tolydinė intervale nuo a iki b, taške x_i *virsta begalybe, kas prieštarauja I-ai teoremai. Taigi lieka, kad mūsų prileidimas yra neteisingas ir, kad funkcija ne tik artėja savo maximalinei ribai, bet ir per ją pereina, t.y.* $f(x_i) = M$. *Lygiai taip pat įrodoma ir minimalinės ribos atžvilgiu.*

Kita teorema apie anksčiau minėtą tolydžiosios funkcijos vidurinės reikšmės savybę.

III *Cauchy (Koši) teorema. Jei funkcija f(x) yra tolydinė intervale nuo a iki b ir jei jos kraštinės reikšmės f(a) ir f(b) yra priešingų ženklų, tai intervale tarp a ir b rasis bent viena argumento reikšmė c, prie kurios pati funkcija f(c) bus lygi nuliui.*

Teoremos įrodymas remiasi konkrečiu funkcijos grafiko brėžiniu, kuriame pavaizduotas grafiko kirtimasis su koordinačių ašimi X taške c.

Leiskima, kad mūsų funkcijos grafika atvaizduota 40 brėžiny. Tada $f(a) > 0$ ir $f(b) < 0$. Intervalą tarp a ir b dalome pusiau. Gauname tašką a_1 tokį, kad $f(a_1) > 0$.

Intervalą a_1 ..... b vėl dalome pusiau ir gauname b_1 tokį, kad $f(b_1) < 0$

„ a_1 ..... b_1 „ „ „ b_2 „ $f(b_2) < 0$

„ a_1 ..... b_2 „ „ „ a_2 „ $f(a_2) > 0$

Taip dalindami mes galime priartėti prie argumento reikšmės c be galo arti.

Šioje vietoje įrodymas remiasi geometriniu vaizdiniu, kad grafikas būtinai kirs koordinačių ašį ir susikirtimo taškas c yra ieškomas. Šio fakto šiuolaikinis įrodymas turėtų remtis realiųjų skaičių aibės pilnumo savybe. Toliau cituojame įrodymą:

Sakysime radome du be galo artimus taškus a_i ir b_k tokiuos, kad

$| f(a_i) – f(b_k) | < \varepsilon$ .... (α) $| a_i – b_k | < \hat{o}$ ir

$f(a_i) > 0$, o $f(b_k) < 0$ ....(β) ir $a_i < c < b_k$

Iš (α), atsižvelgę į (β) , galime tvirtinti, kad $f(a_i) – f(b_k) = | f(a_i)| + |f(b_k)| < \varepsilon$ *arba*

$f(a_i) < \varepsilon / 2$ *ir* $f(b_k) < \varepsilon / 2$ *arba* $\lim f(a_i) = 0$ *ir* $\lim f(b_k) = 0$. *Bet iš Weierstrass'o teoremos turima, kad jeigu funkcija artėja kuriai nors ribai, tai ji šią ribą ir pasiekia. Taigi $f(c) = 0$.*

Paskutinis argumentas taikant *Weierstrass*o teoremą nėra korektiškas, nes nulis šiai funkcijai nėra nei maksimumo nei minimumo taškas. Matyt remiamasi *Weiertrass*o teoremos įrodymo argumentais. Apibendrinant galima teigti, kad Z. Žemaičio konspekte esantis vidurinės reikšmės savybės įrodymas savo loginių samprotavimų tikslumu nusileidžia *A.-L. Cauchy* įrodymui.

Kitoje teoremoje naudojama „tolydiškai tolydinės" funkcijos sąvoka. Dabar sakome „tolygiai tolydinė" funkcija. Jos apibrėžtis Z. Žemaičio konspekte [ZŽ1939] 56 p. įprasta. Priminsime, kad šios sąvokos *A.-L.Cauchy* nenaudojo, bet jo tolydumo samprata, grindžiama be galo mažais dydžiais, gali būti ekvivalenti tolygiam tolydumui kaip aptarėme anksčiau.

IV <u>Cantor-Heine teorema</u>. <u>*Jei funkcija f(x) yra tolydinė intervale nuo a iki b, tai ji yra tolydiškai tolydinė.*</u>

Konspekte pateiktas ir toliau cituojamas šios teoremos įrodymas yra klaidingas.

Funkcija bus tolydiškai tolydinė intervale nuo a iki b, jei visą intervalą padalinus į tam tikrą skaičių vienodų tarpų, kiekviename tarpe dvi jo reikšmės x_i ir x_k patenkins sąlygą $| f(x_i)-f(x_k)| < \varepsilon$ t.y. nepriklauso nuo to, kokioj intervalo dalyj tas tarpelis rastųsi. Imame intervalą nuo a iki b ir daliname pusiau, paskiau tas dalis vėl daliname pusiau ir t.t. Taip dalinėdami visą intervalą nuo a iki b padaliname į tam tikrą skaičių vienodų tarpų. Paimsime vieną tokių dalelių – nuo x_i iki x_k. Paimsime reikšmę x_m , stovinčią tarp x_i ir x_k

Padalinimų skaičių galime didinti kiek norime, todėl paimsime taip, kad x_i ir x_k būtų visai arti x_m t.y. $| x_i - x_m | < \delta/2$ ir $| x_m - x_k | < \delta/2$ .... (α).
Bet funkcija yra tolydinė intervale nuo a iki b, todėl turės būti patenkintos sąlygos
$| f(x_i) - f(x_m) | < \varepsilon/2$ ir $|f(x_m) - f(x_k) | < \varepsilon/2$ ....(β).

Tai teisinga vienam pasirinktam tarpeliui. Įrodymui reikia, kad tai būtų teisinga visiems tarpeliams, o to negarantuoja pasirinktas samprotavimas, nes δ priklauso nuo x_m . Todėl likusios įrodymo dalies necituojame.
4.4. Funkcijos išvestinė. Kaip ir ŠMA, funkcijos išvestinė yra funkcijos prieauglio ir argumento prieauglio santykio riba, kai argumento prieauglis artėja į nulį. Kartu apibrėžiama ir diferencialo sąvoka. Šiek tiek trumpinant konspekto tekstą, apie diferencialą pasakoma:

Funkcijos f prieauglį žymint Δy, o argumento prieauglį Δx, išvestinę galima išreikšti taip:

$$lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x), \quad \text{kur } f'(x) \text{ yra baigtinis dydis. Tada}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \eta \;\; arba \;\; \Delta y = f'(x)\Delta x + \eta\Delta x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

čia η yra begalinė mažybė. Kai Δx→0, tai ir Δy→0, Δy, f‘(x)Δx yra pirmos eilės begalinės mažybės atžvilgiu Δx, nes jų santykis su Δx yra baigtinis dydis, o ηΔx yra aukštesnės eilės begalinė mažybė. Be galo mažą funkcijos prieauglį Δy žymėsime dy ir vadinsime funkcijos diferencijalu, o Δx žymėsime dx ir vadinsime argumento diferencijalu. Tada (4) lygybę galėsime išreikšti

$$dy = f'(x)dx + \eta dx \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4a)$$

bet ηΔx yra aukštesnės eilės begalinė mažybė, todėl ją ***atmetame*** *ir gauname* ***artutinę lygybę****:*

$$dy = f'(x)dx \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4b)$$

t.y. funkcijos diferencijalas ***yra lygus*** *jos išvestinei, padaugintai iš argumento diferencijalo.*

Pajuodinta mano, norint atkreipti dėmesį į argumentavimo netikslumą.

5. A. Juškos ,,Matematinės analizės pagrindai“

Matematinės analizės turinys dėstomas pradedant skaičiaus kaip taško ant geometrinės tiesės apibūdinimu pirmajame skyriuje. Antrasis skyrius pradedamas sakiniu: ,,Skiriame pastovius ir kintamus dydžius“. Netrukus toliau teigiama:

Jei tarp dviejų ar daugiau kintamųjų dydžių yra toks ryšys, kad kintant vieniems dydžiams, būtinai kinta kiti, tai mes sakome, kad tie kiti dydžiai yra pirmųjų funkcijos. Šiuo tarpu tekalbėsime apie dvejetą kintamųjų dydžių, kurių vienas laisvai kinta ir esti vadinamas argumentu, o antras kinta pareinamai nuo šito pirmojo. Sakome, antras yra pirmojo funkcija.

Taigi, funkcijos samprata įprastinė nagrinėjamam laikotarpiui Lietuvoje. Tolydinė funkcija apibrėžiama taip ([Juška], 31 pusl.):

Kuri nors funkcija y=f(x) yra tolydinė, jei jos bet kuris pakitimas Δy yra mažesnis už bet kurį, nors ir labai mažą, dydį ε, kai atitinkamai mažai tepasikeičia argumentas. Argumento pakitėjimas pereina nuo pasirinktojo dydžio ε didumo. Todėl, trumpai, tolydine vadinsime funkciją y=f(x) jei $\Delta y < \varepsilon$, kai $\Delta x < \varphi(\varepsilon)$.

Šiame vadovėlyje nagrinėjamos tik elementariosios funkcijos ir jų savybės. Bendros savybės tolydžiosioms funkcijoms nėra formuluojamos.

Gerokai toliau po tolydinės funkcijos apibrėžties formuluojama funkcijos ribos sąvoka ([Juška], 38 pusl.): *funkcija y=f(x) turi ribą a, kai x-ui artėjant į tam tikrą dydį, skirtumas $|f(x)-a| < \varepsilon$ nors ε ir visai būtų mažas*. Tokia nepilna ribos apibrėžtis yra pakankama paprastiems pavyzdžiams iliustruoti. Vadovėlio 43 puslapyje suformuluojami ir paaiškinami ribos dėsningumai atliekant aritmetines operacijas su funkcijomis.

Ribos sąvoka naudojama apibrėžti išvestinę vadovėlio 45 puslapyje. Tačiau netrukus po tokio apibrėžimo pereinama prie diferencialo sąvokos ir teigiama, kad išvestinė yra diferencialų santykis. Būtent, rašoma:

Kintamųjų dydžių skirtumai, arba pakitėjimai, kurie eina į nulį (vadinasi, kurie gali būti mažesni už bet kurį nors labai mažą dydį ε) vadinasi diferencialais; už tat išvestinė dar vadinama diferencialų santykiu. Taigi, funkcijos y= f(x) išvestinė rašoma dar taip:

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}.$$

Tačiau dešinėje esantis santykis nėra tik išvestinis simbolis. Su diferencialais elgiamasi kaip su be galo mažais dydžiais, nors tokie vadovėlyje neapibrėžiami. Tai iliustruoja sudėtinės funkcijos diferencijavimo taisyklės įrodymas vadovėlio 53 puslapyje. Šiame įrodyme su diferencialais elgiamasi kaip su algebriniais dydžiais juos dauginant ir dalinant.

Taigi, vadovėlis nėra nuoseklus. Tarp pateikiamų pagrindinių sąvokų nėra be galo mažų dydžių (diferencialų), bet, vaizdžiai kalbant, jie įtempiami paslapčia per užpakalines duris.

Išvados

Sprendžiant pagal trijų apžvelgtų vadovėlių turinį, tarpukario Lietuvoje matematinės analizės pagrindus buvo bandoma sieti su matematikos istorijoje fundamentalią reikšmę turėjusio A.-L. Cauchy 1821 metų vadovėlio *Course d'Analyse* idėjomis. Kaip ir Cauchy vadovėlyje, matematinės analizės pirmine sąvoka buvo kintamasis dydis. Tačiau šios sąvokos turinys apžvelgtuose vadovėliuose skyrėsi nuo 1821 metų vadovėlio sąvokos turinio. Jis labiau panašėjo į dabar šiai sąvokai suteikiamą prasmę. Nepaisant to, savo forma, matematinės analizės pagrindimas buvo identiškas Cauchy pagrindimui. Tačiau svarbiausia, loginio samprotavimo tikslumo prasme, t.y. įrodymų griežtumo prasme, Cauchy lygmens nepasiekta.

Išsaugant kintamojo dydžio dominavimą, Z. Žemaičio konspekte bandyta perimti K. Weierstrasso ribos sampratą ir įrodyti pagrindines tolydinių funkcijų savybes. Tačiau nesėkmingai. Įrodymai liko arba intuityvūs arba klaidingi. Nebuvo įvertinta realiųjų skaičių aibės pilnumo svarba. A. Juškos vadovėlyje bendros tolydinių funkcijų savybės visai nenagrinėjamos, apsiribojama elementariųjų funkcijų pavyzdžiais.

Apibendrinant galima teigti, kad nagrinėtuose matematinės analizės vadovėliuose pirmine ir dominuojančia sąvoka išliko kintamasis dydis ir nerealizuota analizės aritmetizacija [AA].

Mūsų tyrimas apsiribojo tolydinės funkcijos samprata ir jos savybių pagrindimu tarpukario Lietuvoje. Liko nenagrinėtas pats diferencialinis ir integralinis aparatas. Toks tyrimas galėtų suteikti daugiau spalvų dabartiniam analizės idėjų paveikslui, bet negalėtų pakeisti jo pagrindinių bruožų.

Panašų tyrimą atliko J. Kastickaitė ir J. Banionis. Jų darbo [Kastickaitė2009] ir [Kastickaitė2010] išvados:

> *1918–1940 m. tobulėjo diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų dėstymas mokykloje. Vadovėliuose pateikiamos diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų teorijos lygis toks aukštas, jog be didelių problemų jį galima lyginti su šiuolaikinių vadovėlių skyriais, kuriuose nagrinėjami analizės pradmenys;*
>
> *1918–1940 m. ir šiuolaikinių vadovėlių diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų išdėstymas bei pateikimas yra labai panašus. Nedidelių problemų būtų tik su matematine terminija (pavyzdžiui, „pastovi tiekybė“ – konstanta, „tarpas“ – intervalas, „prieauglius“ – pokytis ir kt.);*
>
> *J. Stoukaus, A. Juškos, Br. Ketarausko vadovėlių, prof. Z. Žemaičio mokslinių darbų, mokytojo A. Karaliaus (1889–1940) (jis rašė diferencialinio ir integralinio skaičiavimo mokymo klausimais) straipsnių dėka 1918–1940 m. buvo pažangiai dėstomi diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenys, didelis dėmesys buvo skiriamas taikomojo pobūdžio temoms.*

Mes pritartume vienam J. Kastickaitės ir J. Banionio išvadų aspektui: lyginant tarpukario laikotarpio ir šiuolaikinį matematinės analizės dėstymą, panaši yra matematikos idėjų pateikimo forma. Šis panašumas yra tai, kad matematika pateikiama kaip tarpusavyje nesusietų metodų ir procedūrų rinkinys, naudingas, gal būt, tik praktiniams uždaviniams spręsti. Kaip ir dabar, tarpukario matematikos ugdyme nėra bendro matematikos idėjų paveikslo, jų raidos peripetijų ir dvasinės kultūros problemų sprendimo įtakos matematikai. Tiksliau apibūdinti praeities ir dabarties matematinio ugdymo bruožus, reikalingas žymiai rimtesnis tyrimas.

Pastabos

[1]Cituojama iš ([Bair et al], 900 pusl.):

> *The mathematical term μεγεθος (megethos) in ancient Greek has been translated into Latin as **quantitas**. In modern languages it has two competing counterparts; in English, **quantity**, **magnitude**; in French, **quantité**, **grandeur**; in German, **Quantität**, **Grösse**. The term grandeur with the meaning real number is still in use in (Bourbaki 1947).*

[2]Cituojama iš [Aristotel. The Methapysics. Roger Bishop Jones, 2012]:

> *Quantum' means that which is divisible into two or more constituent parts of which each is by nature a 'one' and a 'this'. A quantum is a plurality if it is numerable, a magnitude if it is a measurable. 'Plurality' means that which is divisible potentially into non-continuous parts, 'magnitude' that which is divisible into continuous parts; of magnitude, that which is continuous in one dimension is length; in two breadth, in three depth. Of these, limited plurality is number, limited length is a line, breadth a surface, depth a solid.*

[3]Cituojama iš ([Cauchy], 6 pusl.):

> *We call a quantity variable if it can be considered as able to take on successively many different values. .... On the other hand, a quantity is called constant, ..., if it takes on a fixed and determined value.*

[4]Cituojama iš ([Cauchy], 6 pusl.):

> *When the values successively attributed to a particular variable indefinitely approach a fixed value in such a way as to end up by differing from it by as little as we wish, this fixed value is called the limit of all the other values.*

[5]Cituojama iš ([Cauchy], 7 pusl.):

> *When the successive numerical values of such a variable decrease indefinitely, in such a way as to fall below any given number, this variable becomes what we call infinitesimal, or an infinitely small quantity. A variable of this kind has zero as its limit.*

[6]Cituojama iš ([Cauchy], 17 pusl.):

> *When variable quantities are related to each other such that the value of one of the variables being given one can find the values of all the other variables, we normally consider these various quantities to be expressed by means of the one among them, which therefore takes the name the independent variable. The other quantities expressed by means of the independent variable are called functions of that variable.*

[7]pastaba. Ši *Cauchy* funkcijos sampratos forma labai paplitusi ir šiais laikais, ypač mokykliniuose vadovėliuose. Ji naudojama greta su ŠMA samprata, pagal kurią funkcija yra taisyklė f vienos aibės elementams x, vadinamiems jos argumentais, priskirianti kitos aibės elementus $y=f(x)$, vadinamus funkcijos f reikšmėmis. Pagal *Cauchy*, kintamasis $f(x)$ yra funkcija, o pagal ŠMA, taisyklė f yra funkcija.

[8]Cituojama iš ([Cauchy], 26 pusl.):

> *Let f (x) be a function of the variable x, and suppose that for each value of x between two given limits, the function always takes a unique finite value. If, beginning with a value of x contained between these limits, we add to the variable x an infinitely small increment a, the function itself is incremented by the difference*

$f(x+a)-f(x)$,

which depends both on the new variable a and on the value of x. Given this, the function f (x) is a continuous function of x between the assigned limits if, for each value of x between these limits, the numerical value of the difference

$f(x+a)-f(x)$

decreases indefinitely with the numerical value of a. In other words, the function f (x) is continuous with respect to x between the given limits if, between these limits, an infinitely small increment in the variable always produces an infinitely small increment in the function itself.

[9]Cituojama iš ([GG1994], 321 pusl.):

If it is possible to determine a bound δ for h such that, for all |h| < δ, |f(x+h) – f(x)| will be smaller than a given arbitrarily small quantity ε, then we say that infinitely small changes of the variable correspond to infinitely small changes of the argument.

Literatūra

[AA] Arithmetization of analysis. *Encyclopedia of Mathematics.* Internete: http://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Arithmetization_of_analysis

[Bair et al] J. Bair, P. Blaszczyk, R. Ely, V. Henry, V. Kanovei, K.U. Katz, M.G. Katz, S.S. Kutateladze, T. McGaffey, D.M. Schaps, D. Sherry, S. Shnider. *Is Mathematical History Written by the Victors*? Notices of the AMS, Vol. 60, No. 7, 886-904, (2013).

[Berkeley] G. Berkeley. *The analyst*. Rinkinyje: *From Kant to Hilbert*: *A source Book in the Foundations of Mathematics*, Ed. W. Ewald, vol. I, Clarendon Press, 1996, pusl. 60-92.

[Błaszczyk] P. Błaszczyk, M.K. Katz and D. Sherry. *Ten misconceptions from the history of analysis and their debunking*. Foundations of Science, 2013, Vol. 18, no 1, 43-74.

[Bolzano] B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes dass zwischen je zwry Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reele Wurzel del' Gleichung liege*, Prague, 1817. Vertimas į anglų kalbą rinkinyje *From Kant to Hilbert*: *A source Book in the Foundations of Mathematics*, Ed. W. Ewald, vol. I, Clarendon Press, 1996.

[Borovik] A. Borovik and M. Katz. *Who gave you the Cauchy-Weierstrass tale*? *The dual history of rigorous calculus*. Foundations of Science 17 (2012), no. 3, 245-276.

[Castelao et al] J.M.P. Castelao, F.J. Pérez-Fernández, C.O. S. Alemán. *Following the steps of Spanish Mathematical Analysis: From Cauchy to Weierstrass between* 1880 *and* 1914. Max-Planck-Institut Für Wissenschaftsgeschichte, Preprint 352, 2008.

[Cauchy] A.-L. Cauchy. *Cours d'analyse = Cours d'analyse de l'ecole royale poly technique. Ire partie: analyse algebrique*. Paris, 1821. Vertimas į anglų kalbą R.E. Bradley and C.E. Sandifer. *Cauchy's Course d'analyse*. An Annotated Translation. Springer, 2009.

[Dunham] W. Dunham. *The Calculus Gallery. Masterpieces from Newton to Lebesgue*. Princeton University Press, 2005.

[Grabiner1981a] J.V. Grabiner. *The Origins of Cauchy‘s Rigorous Calculus*. M.I.T. Press, 1981.

[Grabiner1981b]. J.V. Grabiner. *Changing attitudes toward mathematical rigor*: *Lagrange and analysis in the eighteenth and nineteenth centuries*. Rinkinyje Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century, H.N. Jahnke and M. Otte (eds.). D. Reidel Publ. 1981, pusl. 311-330.

[Grabiner1983] J.V. Grabiner. *Who gave you the epsilon*? *Cauchy and the origins of rigorous calculus*. The American Mathematical Monthly, 1983, vol. 90, No. 3, 185-194.

[GG1994] I. Grattan-Guinness (Ed.). Companion *Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. Vol. 1. The John Hopkins University Press, 1994.

[GG1996] I. Grattan-Guinness. Numbers*, Magnitudes, Ratios, and Propositions in Euclid‘s Elements*: *How Did He Handle Them*? Historia Mathematica 23 (1996), 355-375.

[GG2000] I. Grattan-Guinness. *The Search for Mathematical Roots*, 1870-1940: *Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*. Princeton University Press, 2000.

[Gray] J. Gray. *Plato‘s Ghost*: *The Modern Transformation of Mathematics*. Princeton University Press, 2008.

[Jahnke] H.N. Jahnke. *A History of Analysis*. Series: History of Mathematics, vol. 24. AMS ir LMS, 2003.

[Juška] A. Juška. Matematinės analizės pagrindai. Analitinės geometrijos, diferencialinio ir integralinio skaičiavimo vadovėlis aukštesniajai mokyklai. Kaunas, Sakalo bendrovė, 1934.

[Karalius] A. Karalius. *Be galo mažų tiekybių skaičiuotė*. Švietimo darbas, 1927, Nr. 3, 261-269.

[Kastickaitė2009] J. Kastickaitė ir J. Banionis. *Diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų mokymas Lietuvos mokykloje iki matematikos mokymo reformos* (1918-1928). Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 155-159.

[Kastickaitė2010]] J. Kastickaitė ir J. Banionis. *Diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų mokymas Lietuvos mokykloje po matematikos mokymo reformos* (1929-1940). Liet. mat. rink. LMD darbai, **51**, 2010, 198-203.

[Laugwitz] D. Laugwitz. *Real-variable analysis from Cauchy to non-standard analysis*. In: [GG1994], 318-330.

[Smorynski] C. Smoryński. *Adventures in formalism*. 2012, College Publications.

[Stanaitis] O. Stanaitis. *Pastabos dėl „begalinių mažybių“.* Tautos mokykla, 1935, Nr. 21, 487-490.

[Stoukus] J. Stoukus. *Begalinių mažybių analizio pagrindai*. Kaunas, „Vytis“, 1925.

[ZŽ1931] *Diferencijalinis-integralinis skaičiavimas*. Paskaitų, skaitytų Prof. Z. Žemaičio 1931/2 akad.met., užrašai. I Sąsiuvinys. Kaunas, V. D. Universitetas, 1931 m.

[ZŽ1935] *Diferencijalinis-integralinis skaičiavimas*. Prof. Z. Žemaičio 1934/5 m. paskaitų užrašai. II dalis. Kaunas, 1935. Leidėjai: stud. mat. P. Povilaitis ir J. Šinkūnas.

[ZŽ1939] *Diferencijalinis-integralinis skaičiavimas*. Prof. Z. Žemaičio paskaitų užrašai. Kaunas, 1939. Leidėjas: stud. mat. Petras Povilaitis.