УДК 531.31

ОБ ОСНОВНОМ ЗАКОНЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Л. Кульвецас

1. Основной закон классической динамики (ОЗКД) записывают в векторной форме

$$m\,\mathbf{w}=\mathbf{F},\quad \frac{d}{dt}\,(m\,\mathbf{v})=\mathbf{F} \tag{1}$$

(для материальной точки) или – в механике сплошных сред – в мóторной форме

$$[\mathscr{A}]=\frac{d}{dt}\,[K]=[\mathscr{F}] \tag{2}$$

(см., например [1–4]). Вследствие самой модели языка L_{Vect} векторного исчисления, принятой в классической механике, символы $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}$ в формулах (1) обозначают определенные элементы векторного пространства V^3, являющегося пространством трансляций любого трехмерного евклидова мгновенного пространства (или мгновения) I [5, с. 684]. Эту теоретическую ситуацию поясняет рисунок. Здесь E – (четырехмерный) мир событий классической механики, I – одно из мгновений, являющееся трехмерным евклидовым пространством, $y-x=\mathbf{u}\in V^3$ – вектор трансляционного пространства V^3 евклидова пространства I, сопоставленный с парой одновременных событий $x,y\in E$.

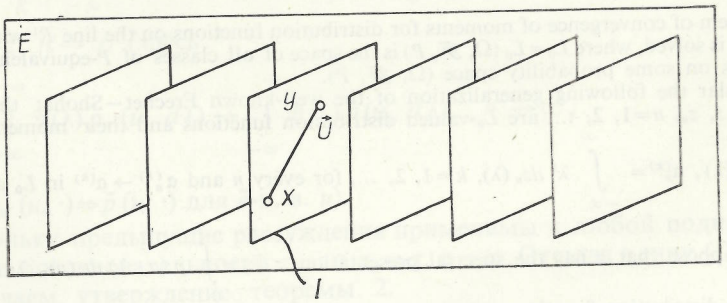

Рис.

Вследствие же модели языка L_{Mot} мóторного исчисления, содержащего в себе язык L_{Vect}, символы $[\mathscr{A}]$, $[K]$, $[\mathscr{F}]$ в (2) обозначают некоторые мóторы (торсоры), т. е. геометрические образы, являющиеся эквивалентами систем скользящих векторов (см. [6, 7]).

Буква m в (1) обозначает – в силу тех же моделей языков L_{Vect} и L_{Mot} – некоторое действительное число; выражение d/dt является оператором дифференцирования по независимой действительной переменной t.

2. Однако традиционные формулировки ОЗКД даются не на языке L_{Vect} или L_{Mot}, т. е. не в терминах геометрических и математических объектов $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}$, $[\mathscr{A}]$, m, d/dt и т. д. и математических операций над ними, а на расширенном языке $L_{\mathcal{M}}$ некоторой *физической структуры* $\mathcal{M}$, т. е. в терминах *физических объектов* (в смысле Я. А. Схоутена [8]) — физических величин: массы $\mathfrak{m}$, ускорения $\mathfrak{w}$, скорости $\mathfrak{v}$, силы $\mathfrak{F}$, динамического мотора $\mathfrak{A}$, силового мóтора $\mathfrak{K}$, длительности промежутков времени τ и операций их умножения, деления и предельного перехода.

Заметим, что в методологии эмпирических наук под физической структурой подразумевают структуру

$$\mathcal{M} = \langle M_0,\ S,\ Q_1,\ \ldots,\ Q_k,\ \rho \rangle,$$

где

а) M_0 есть некоторая математическая структура (M_0 непременно содержит в качестве подструктуры стандартную модель анализа);

б) S есть непустое множество *физических ситуаций* (физических объектов или систем физических объектов в определенных состояниях);

в) $Q_1, \ldots, Q_k$ являются *физическими величинами*;

г) ρ есть функция, называемая математической *реализацией* физических величин, которая каждой физической величине Q_i ставит в соответствие математический объект $\rho(Q_i)$ или класс математических объектов из M_0 (см. [9, 10]).

Функция ρ связывает операциональную часть $\langle S, Q_1, \ldots, Q_k \rangle$ физической структуры $\mathcal{M}$ с ее математической частью M_0; язык $L_{\mathcal{M}}$, связанный со структурой $\mathcal{M}$, содержит в себе язык L_{M_0} ее математической части.

Физическая теория θ определяется как упорядоченная тройка $\langle L_{\mathcal{M}}, A, R \rangle$, где $L_{\mathcal{M}}$ есть научный язык, связанный с физической структурой $\mathcal{M}$, A — система аксиом теории θ, R — система правил вывода (логика теории θ) (см. [10, 11], [12, с. 7, 8]).

Итак, хотя основной закон классической механики как физической теории $\mathcal{T}_{\text{кл. мех}}$ записывается на языке L_{M_0} ее математической части (включающем языки L_{Vect} и L_{Mot}), традиционные формулировки этого закона даются на другом, расширенном языке $L_{\mathcal{M}}$, причем в этих формулировках используются функторы (например, одноместный функтор „масса" ($\mathfrak{m}$), трехместный функтор „ускорение" ($\mathfrak{w}$), двухместный функтор „сила" ($\mathfrak{F}$)), которых вовсе нет в алфавите языка L_{M_0}. Примером может служить стандартная формулировка основного закона для материальной точки [13, с. 171]: „*произведение массы точки на ее ускорение* (относительно инерциальной системы отсчета) *равно действующей на точку силе*", т. е. если выписать полностью соответствующие именные формы языка $L_{\mathcal{M}}$, то

$$\mathfrak{m}(P) \cdot \mathfrak{w}(P,\ \Sigma,\ I) = \mathfrak{F}(P,\ I). \tag{3}$$

Здесь P — переменная для материальных точек, Σ — переменная для систем отсчета, I — переменная для моментов времени (мгновений).

Такие формулировки как (3) являются более сильными утверждениями, чем (1) и (2). Они никак не следуют из этих геометрических соотношений — не следуют просто потому, что алфавит математического языка L_{M_0} (вернее, языка $L_{(M_0, S)}$), формулами которого являются выражения (1) и (2), не содержит функторов $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{A}$ и т. д., интерпретируемых как функции, пере-

рабатывающие наборы объектов из соответствующих областей в физические величины Q_i классической механики.

Таким образом, имеется существенный смысловой разрыв между тем, что принято считать ОЗКД для материальной точки или сплошной среды (формулы (1), (2)), и обычными формулировками этого закона (формула (3) и аналогичная формула

$$\mathfrak{A}(\mathscr{B}, \Sigma, I) = \mathfrak{K}(\mathscr{B}, I) \tag{4}$$

для сплошных сред; переменная $\mathscr{B}$ пробегает множество материальных тел).

3. В связи с такой двойственностью представления ОЗКД возникает естественный вопрос: какое же из двух соответствующих утверждений надо считать действительным ОЗКД? Например, надо ли считать действительным ОЗКД для материальной точки утверждение (1) или в качестве него следует принять утверждение (3)? Попробуем ответить на этот вопрос.

Прежде всего заметим, что в настоящее время формулу (3) нельзя не только считать ОЗКД, но и вообще включать в классическую механику как физическую теорию, так как ни один входящий в эту формулу функтор ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{F}$) пока не имеет строгого и адекватного определения – ни явного, ни аксиоматического. Это отметил еще А. Пуанкаре [14, с. 68] (см. также [15]). Поэтому совершенно неясно, между какими объектами ставится знак равенства в формуле (3). Кроме того, не известно, что подразумевать под произведением скалярных и векторных физических величин вообще и под произведением массы $\mathfrak{m}(P)$ и ускорения $\mathfrak{w}(P, \Sigma, I)$ в частности [16].

Но особо серьезным препятствием для включения формулы (3) в число выражений классической механики является постоянное отсутствие корректного определения понятия ускорения $\mathfrak{w}$ (равным образом как и понятия скорости $\mathfrak{v}$) – отсутствие, обусловленное прежде всего неадекватностью трактовки понятия времени, смешением временных понятий с арифметическими [17]. Поясним это подробнее.

В кинематике издавна, начиная с первых ее шагов в XIX веке, мгновенное ускорение точки определяют как вторую производную $d^2\mathbf{r}/dt^2 = \ddot{\mathbf{r}}$ от ее радиуса-вектора $\mathbf{r}$ по независимой действительной переменной t при данном ее значении $t_I = t$ (см., например, [18], [13, с. 68]). Но поскольку $\mathbf{r} \in V^3$ и $t_I = t \in R^1$ (R^1 – множество действительных чисел), имеем и $\ddot{\mathbf{r}} \in V^3$. Поэтому вторая производная $\ddot{\mathbf{r}}$ как элемент линейного пространства V^3, входящего в математическую часть M_0 соответствующей физической структуры $\mathscr{K}$, может быть только геометрическим образом мгновенного ускорения $\mathfrak{w}(P, \Sigma, I)$, но не самим ускорением.

Однако главное заключается в другом. Традиционная дефиниция понятия ускорения

$$\mathfrak{w} = d^2\mathbf{r}/dt^2,$$

или, подчеркивая функторный характер символов $\mathfrak{m}$ и $\mathbf{r}$,

$$\mathfrak{w}(P, \Sigma, I) = \frac{d^2}{dt^2}\,\mathbf{r}(P, \Sigma, I), \tag{5}$$

не только неадекватна, но и логически некорректна, так как приводит к ложным следствиям. В самом деле, значение второй производной $(d^2/dt^2)\mathbf{r}(P, \Sigma, I)$ зависит от выбора отображения $I \mapsto t_I = t \in R^1$ множества моментов вре-

мени I на множество R^1; например, при переходе к другому арифметическому отображению времени

$$I \mapsto t_I^* = t^* \in R^1, \quad t^* = at + b, \quad a > 0, \tag{6}$$

допускаемому галилеевым принципом относительности [19, с. 4], вектор $(d^2/dt^2)\,\mathbf{r}\,(P, \Sigma, I)$ приобретает множитель a^{-2} [20, с. 8]. Поэтому определение (5) тотчас ведет к ошибочному выводу

$$\mathfrak{w}(P, \Sigma, I) = a^{-2}\,\mathfrak{w}(P, \Sigma, I). \tag{7}$$

Для того чтобы определение (5) могло служить предпосылкой в доказательствах теорем теории $\mathcal{T}_{\text{кл. мех}}$, ему следует придать вид *нормальной* дефиниции [21].

Пусть $\mathcal{X}^{-1}$ – отображение, обратное взаимно однозначному отображению $I \mapsto t_I = t \in R^1$. Тогда $I = \mathcal{X}^{-1}(t)$, и нормальный вид определения (5) представляется таким:

$$\forall P \forall \Sigma \forall \mathcal{X} \forall t \left(\mathfrak{w}\left(P, \Sigma, \mathcal{X}^{-1}(t)\right) = \frac{d^2}{dt^2}\,\mathbf{r}\left(P, \Sigma, \mathcal{X}^{-1}(t)\right)\right) \tag{8}$$

($\forall$ – квантор общности).

Для формального вывода соотношения (7) достаточно момент времени $I = \mathcal{X}^{-1}(t)$ представить в виде $\mathcal{X}^{*-1}(t^*)$, где $\mathcal{X}^*$ – отображение (6), и, воспользовавшись определением (8), эксплицировать выражение $\mathfrak{w}\left(P, \Sigma, \mathcal{X}^{*-1}(t^*)\right)$, вычисляя для этого вторую производную $(d^2/dt^{*2})\,\mathbf{r}\left(P, \Sigma, \mathcal{X}^{*-1}(t^*)\right)$.

Возможность при помощи правильного рассуждения получить ложный вывод (7) является следствием некорректности определения (8): в дефиниендум этого определения входит именной функтор $\mathcal{X}^{-1}$ и не входит никакой оператор; в правильной дефиниции этого быть не может [22, с. 76].

Итак, на современном этапе развития понятийной структуры классической механики формулу (3) на самом деле нельзя считать ОЗКД для материальной точки. Но и формулы (1) не могут представлять собою этого закона! В самом деле, нельзя, во-первых, утверждать, что эти формулы выражают связь между *массой* точки, ее *ускорением* и действующей на нее *силой* (или связь между изменением *количества движения* точки и действующей на нее *силой*): физические величины и их арифметические или геометрические образы – разные вещи. Во-вторых, и это главное, в (1) фигурирует именной функтор $\mathbf{w}$ (или именная форма $\mathbf{w}(P, \Sigma, I)$), традиционное определение которого (как „ускорения") совершенно аналогично определению (5)

$$\mathbf{w}(P, \Sigma, I) = \frac{d^2}{dt^2}\,\mathbf{r}(P, \Sigma, I). \tag{9}$$

Эта дефиниция также некорректна, как и определение (5), и по той же причине. Опираясь на нее и рассуждая так же, как и по отношению к (5), приходим к ложному следствию

$$\mathbf{w}(P, \Sigma, I) = a^{-2}\,\mathbf{w}(P, \Sigma, I).$$

Поэтому формула $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$, или (если выписать полностью аргументы соответствующих функторов) формула

$$m(P) \cdot \mathbf{w}(P, \Sigma, I) = \mathbf{F}(P, I), \tag{10}$$

влечет заключение

$$\mathbf{F}(P,\ I)=a^{-2}\,\mathbf{F}(P,\ I),\quad a>0.$$

Это противоречие никак не позволяет считать формулы (1) (или более полную и точную формулу (10)) основным законом динамики точки.

Впрочем, некорректное определение (9) можно было бы исправить, заменив в его дефиниендуме и дефиниенсе переменную I, пробегающую множество моментов времени, переменной t, пробегающей множество R^1 действительных чисел. Тогда вместо (9) мы имели бы формально правильное определение

$$\mathbf{w}(P,\ \Sigma,\ t)=\frac{d^2}{dt^2}\,\mathbf{r}(P,\ \Sigma,\ t). \tag{11}$$

Обычно такими определениями ускорения точки „в момент времени t" и ограничиваются (см., например [2, с. 47]); при этом их оправданием считают явно сформулированный или молчаливо принимаемый постулат, согласно которому время в классической механике — это не что иное, как действительная, непрерывно возрастающая независимая переменная t. (Так, самая первая аксиома в известной работе Г. Гамеля [23] гласит: „Существует действительная, непрерывно изменяющаяся величина t, абсолютное *время*".) Опираясь на такой постулат, утверждают, что момент времени — это лишь отдельное значение переменной t и что даже имеется бесконечно много времен τ, каждое из которых связано с временем t некоторым функциональным соотношением $\tau=\varphi(t)$ (см., например, [24, с. 205, 206], [25]). Таким образом, временные понятия (*момент времени, промежуток времени, длительность промежутков времени, отношение „раньше"* и др.) оказываются полностью арифметизированными, слитыми с соответствующими арифметическими понятиями числа, числового промежутка, отношения „меньше" и т. д. Этим доведена до крайности отведенная Лагранжем для „времени t" роль четвертой координаты, присоединяющейся к трем пространственным координатам x, y, z материальной точки [26, с. 311].

Однако уже Ньютон в своем „Methodus Fluxionum" подчеркнул, что фактически никакая числовая переменная t не является временем: „Таким образом, повсюду, где в дальнейшем встречается слово „время" (...), под ним нужно понимать не время в его формальном значении, а только ту отличную от времени величину, посредством равномерного роста или течения которой выражается и измеряется время" [27, с. 45].

Следовательно, действительная переменная t, время ньютоновской механики, — это, по словам самого основателя этой науки, отличная от времени величина! Поэтому отождествление момента времени I с действительным числом t, длительности промежутка времени $(I_1,\ I_2)$ с разностью t_2-t_1 действительных чисел t_2, t_1, временнóго отношения „раньше" с арифметическим отношением „меньше" и т. д. является попросту логической неадекватностью [28], не позволяющей конструировать истинные понятия других физических величин, в том числе скорости $\mathfrak{v}$ и ускорения $\mathfrak{w}$ [16, 17].

Как видим, формула (10), даже при замене в ней именной формы $\mathbf{w}(P,\ \Sigma,\ I)$ корректно определенной функцией $\mathbf{w}(P,\ \Sigma,\ t)$ и именной формы $\mathbf{F}(P,\ I)$ — функцией $\mathbf{F}(P,\ t)$, не может считаться основным законом динамики материальной точки хотя бы потому, что фигурирующие в ней функторы m, $\mathbf{w}$ и $\mathbf{F}$

не обозначают никаких физических величин. Если бы в качестве основной аксиомы классической динамики была принята формула

$$m(P)\cdot \mathbf{w}(P,\ \Sigma,\ t)=\mathbf{F}(P,\ t), \tag{12}$$

в которой вектор $\mathbf{w}(P, \Sigma, t)$ определен соотношением (11), то относительно фундаментальных механических величин $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{F}$ (массы и силы) мы вместе с А. Пуанкаре должны были бы признать, что „не знаем даже, что это такое" [14, с. 68].

Более того, из-за предположения, что t – действительная переменная, и исключения из множества выражений языка теории $\mathcal{T}_{\text{кл. мех}}$ (или только из ее „основного закона") коррелятора $\mathcal{K}$, устанавливающего изоморфизм множества R^1 и множества моментов времени I относительно отношений „меньше" ($<$) и „раньше", мы даже не могли бы отнести высказывание (12) (при фиксированных P, Σ и t) к какому бы то ни было физическому моменту времени I.

4. Подытоживая анализ, проведенный в п. 1–3, можно утверждать, что ни одна из формул (1), (2), (10), (12) не может служить основным законом классической динамики как физической теории, изучающей механическое движение материальных тел при помощи понятий физических величин.

Что же тогда представляет собою ОЗКД? Что это за утверждение и в каких терминах оно сформулировано?

Ясно, что только формула (3) может указать правильное направление, в котором нужно искать точное и адекватное выражение ОЗКД для материальной точки и сплошной среды. Но для этого, как мы видели, необходима реконструкция понятий важнейших механических величин – массы, ускорения, силы. Как явствует из вышеизложенного, начинать эту реконструкцию надо с самых основ – строгого и адекватного подхода к понятию времени, т. е. с реализации замечательного тезиса Пирса Боля о необходимости „ввести время в механику более удовлетворительным образом, чем это делается теперь" [29, с. 198].

Однако и реконструкции понятия времени и других упомянутых физических величин еще недостаточно для окончательного представления основного закона. Внесение строгости в дефиниции и трактовку этих понятий должно быть дополнено корректным и однозначным определением двух важных операций над физическими величинами – умножения и деления, а также введением понятия производной отображения $I \mapsto f(I)$ по времени (рассматриваемом не как действительная переменная t, а как физическая величина, или, вернее, физико-алгебраический объект) [30].

Другие части данной работы будут посвящены изложению одного из вариантов выполнения этой программы.

Литература

1. **Voss A.** Die Prinzipien der rationellen Mechanik // Encykl. math. Wiss. / Red. von F. Klein u. C. Müller. Leipzig. B. G. Teubner. 1901–1908. B. IV 1. S. 3–121.
2. **Валле Пуссен Ш. Ж.** Лекции по теоретической механике. М.: ИЛ, 1948. Т. I.
3. **Жермен П.** Курс механики сплошных сред. Общая теория. М.: Высш. шк., 1983.
4. **Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.** Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М., 1985. Т. 3.
5. **Artz R. E.** Classical mechanics in Galilean space-time // Found. Phys. 1981. V. 11, No 9/10. P. 679–697. ISSN 0015–9018.

6. **Mises R.** Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik // Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. 1924. B. 4, H. 2. S. 155–181.
7. **Диментберг Ф. М.** Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978.
8. **Схоутен Я. А.** Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965.
9. **Dalla Chiara Scabia M. L. and Toraldo di Francia F.** A logical analysis of physical theories // Rivista del Nuovo Cimento. 1973. V. 3, No 1. P. 1–20.
10. **Dalla Chiara M. L.** A multiple sentential logic for empirical theories // Formal Methods in the Methodology of Empirical Sciences / Ed. M. Przelęcki e. a. Wrocław etc. Ossolineum. 1976. P. 43–56.
11. **Montague R.** Deterministic theories // Decisions, Values and Groups / Ed. N. F. Washburne. Oxford etc. Pergamon Press. 1962. P. 325–370.
12. **Sneed J.** The logical structure of mathematical physics. Dordrecht etc.: D. Reidel Publ. Co., 1979.
13. **Бухгольц Н. Н.** Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1965. Ч. I.
14. **Пуанкаре А.** Наука и гипотеза // Анри Пуанкаре. О науке / Пер. с франц. М. Наука, 1983. С. 5–152.
15. Remarque de **M. Feys** dans DISCUSSION GÉNÉRALE // La Méthode Axiomatique dans les Mécaniques Classiques et Nouvelles. Actes du 4e Coll. Intern. de Log. et Phil. des Sci. Paris. 1963. P. 202.
16. **Кульвецас Л. Л.** Четвертый тезис П. Боля и шестая проблема Гильберта // Исследования по истории физики и механики. М. Наука. 1986. С. 62–93.
17. **Кульвецас Л. Л.** К истории определения понятия скорости // Иссл. по ист. мех. М. Наука. 1983. С. 31–68.
18. **Saint-Venant B. de.** Mémoire sur les sommes et les différences géometriques ... // C. R. de l'Acad. d. Sci. de Paris. 1845. T. XXI. P. 620–625.
19. **Hamel G.** Die Axiome der Mechanik//Handb. d. Phys. / Hrsg. von H. Geiger, K. Scheel. Berlin. J. Springer. 1927. B. V. S. 1–42.
20. **Julia G.** Cours de Cinématique. Paris: Gauthier-Villars, 1936.
21. **Слупецкий Е., Борковский Л.** Элементы математической логики и теории множеств. М.: Прогресс, 1965.
22. **Greniewski H.** Elementy logiki formalnej. Warszawa: PWN, 1955.
23. **Hamel G.** Über die Grundlagen der Mechanik//Math. Ann. 1908. B. 66, S. 350–397.
24. **Przeborski A.** Wykłady mechaniki teoretycznej. Warszawa, 1930. T. I.
25. **Жермен П.** Время классической механики // Время и современная физика / Пер. с франц. М. Мир. 1970. С. 40–54.
26. **Lagrange J. L.** Théorie des fonctions analytiques. Nouv. éd. Paris, 1813.
27. **Ньютон И.** Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых // Исаак Ньютон. Математические работы / Пер., вводн. ст. и комм. Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.–Л. ОНТИ. 1937. С. 25–166.
28. **Jacak W., Sierocki I., Tchoń K.** Projekt definicji czasu w teorii systemów//Pr. Nauk. Inst. Cybern. Tech. Politech. Wrocław. 1976. T. 25, No 17. S. 39–61.
29. **Боль П.** О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применимых в механике //Боль П. Собрание трудов / Под ред. Л. Э. Рейзиня. Рига. Зинатне. 1974. С. 73–198.
30. **Кульвецас Л.** Об основном законе классической динамики (в связи с 300-летием выхода "PRINCIPIA" Ньютона) // XXVIII конференция Литовского математического общества. Тезисы докладов. Вильнюс. 1987. С. 181, 182.

Вильнюсский государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
18.09.1987

APIE PAGRINDINĮ KLASIKINĖS DINAMIKOS DĖSNĮ

L. Kulviecas

(*Reziumė*)

Atkreipiamas dėmesys į tai, kad pagrindinis klasikinės dinamikos dėsnis užrašomas vektorinio skaičiavimo kalba L_{Vect} arba (ištisinių aplinkų atveju) mótorinio skaičiavimo kalba L_{Mot}, tuo tarpu tradicinės jo formuluotės duodamos, naudojantis išplėstine kalba $L_{\mathcal{M}}$, susijusia su tam tikra fizikine struktura $\mathcal{M}$. Parodyta, jog abu šie pagrindinio dinamikos dėsnio pateikimai nėra ekvivalentūs. Nagrinėjamos loginės šios esminės neatitikties priežastys bei kai kurie metodologiniai-semantiniai jos aspektai.

ON THE FUNDAMENTAL LAW OF CLASSICAL DYNAMICS

L. Kulviecas

(*Summary*)

Here the attention is drawn to the fact, that the fundamental law of classical dynamics is written down in the language L_{Vect} of vector calculus or (in continuum mechanics) in the language L_{Mot} of motor calculus, though traditionally it is formulated in the extended language $L_{\mathcal{M}}$, associated with some physical structure $\mathcal{M}$. It is showed, that these two presentations of the fundamental law of Newtonian dynamics are not equivalent. The logical reasons of this essential disagreement as well as some of its methodological-semantical aspects are considered.