Vilniaus universitetas

Filosofijos fakultetas

Filosofijos katedra

Adomas Šulcas

Filosofijos studijų programa

Matematikos ir filosofijos rašto darbas

**Matematinė tiesa filosofijos akivaizdoje: aksiomos, tiesos sampratos ir kalbos filosofija**

Darbo vadovas: habil. dr. Rimas Norvaiša

Vilnius 2014

ĮVADAS

Matematikoje ir filosofijoje vis dar išlieka vienas didžiausių klausimų – kas yra tiesa? Kaip galima prie jos prieiti? Koks yra tiesos kriterijus? Šio darbo tikslas – eksplikuoti klasikines filosofines tiesos sampratas, sugretinti su matematika ir padaryti išvadas. Pirmasis skyrius – *Filosofinė tiesos samprata* skirtas tiesos teorijų įvedimui. Įprasta, žinoma, pradėti nuo Antikos laikų tiesos sampratos, tad taip ir padarysiu. Įvedęs kiekvieną sampratą, atliksiu trumpą analizę, lygindamas matematiką ir filosofiją (kiek tai leidžia mano kompetencijos). Žinoma, neįmanoma išanalizuoti visų sampratų, idėjų, tačiau įmanoma pasirinkti garsiausias ir didžiausią įtaką padariusias sampratas. Bus iškeltos matematinės problemos, keletas kalbos filosofijos problemų (jos tampa relevantiškos kalbant apie aksiomas ir apie matematikos santykį su empirine realybę). Išanalizavęs ir sugretinęs sampratas pereisiu prie daugiau originalios (kiek tai įmanoma) filosofijos. Tam bus skirtas skyrius *Matematinė tiesa: aksiomos*. Čia atsidurs mažiausiai citatų, lyginant su visu darbu.  
Daugiausia dirbama su Evaldo Nekrašo veikalu „Filosofijos įvadas“, kadangi ten pakankamai aiškiai ir šiam darbui pakankamai plačiai atskleidžiamos garsiausios ir labiausiai diskutuojamos tiesos sampratos. Žinoma, geriausia būtų traukti informaciją iš pirminių šaltinių, tačiau trumpam aptarimui ir šio darbo ilgiui, manau, pilnai pakanka E. Nekrašo darbo.   
Nagrinėjant problemas pasirodo keletas autorių, kurie nėra tiesiogiai susiję su matematika – Richard Rorty (kalbos filosofas), Edward Lorenz (meteorologas, sukūręs garsųjį drugelio efekto terminą). Trumpam iškyla Frege ir Mill‘is, kai kalbama apie matematiką grynai empirinėje plotmėje.  
Darbe daugiausia kalbama apie aksiomas. Manau, jos itin svarbios matematinei tiesai (tai vėliau dar labiau eksplikuojama), nes iš jų kyla visos kitos išvados. O jos yra tiesa[[1]](#footnote-1) priklausomai nuo aksiomų, ir, manau, jog svarbiausia yra tirti problemos šaknis.  
Filosofinių tiesos sampratų įvedimo tikslas – iškelti matematines-filosofines problemas. Pirmasis skyrius egzistuoja kaip įvestinis į antrąjį, kuriame plačiau aptariama problematika. Šie du skyriai gali neatrodyti labai konceptualiai susiję, tačiau filosofinės tiesos suvokimas padeda atskleisti naują požiūrio kampą matematinėms problemoms, ypač toms, kurios yra susijusios su tiesa ir teisingumu. Visgi, pasirodo, jog klasikinės sampratos nėra pakankamos matematikai, tačiau jos gali būti panaudotos progreso ir apmąstymo tikslais.

FILOSOFINĖS TIESOS SAMPRATOS

Turbūt sveikiausia pradėti nuo išsiaiškinimo apie tai, kas filosofijoje laikoma tiesa. Žinoma, šis ginčas dar neišspręstas, bet matematinės tiesos nagrinėjimui, ypač šiam, tai nemaišo. Pasistengsiu parodyti, jog dabartinės filosofinės tiesos idėjos netenkina matematinės tiesos kaip tokios ir pabandysiu pasiūlyti alternatyvą.  
Logiškiausia pradėti nuo Platono, Aristotelio ir, iš esmės, viduramžių tiesos sampratos, kadangi šios trys sutampa (tiesa, ją plėtoja ir vėlyvesnieji filosofai). Galbūt šiek tiek supaprastinus tai skamba šitaip: „Tiesa yra minties ir tikrovės atitikimas“ (Glanzberg, 2014). Akivaizdu, jog tai sukelia daug problemų, kai kalbame apie matematines tiesas. Norint jas išspręsti galima priimti platonistinę poziciją, jog visi matematikos objektai realiai egzistuoja arba, kad egzistuoja atskira matematinė tikrovė, kurioje yra visi įmanomi matematikos objektai. Bet, turime suvokti, jog net jei ir egzistuoja matematiniai objektai gamtinėje tikrovėje, jų egzistencija visai kitokios formos ir tokie faktiniai teiginiai, aprašantys pasaulį (kokius galvoje turi klasikinės tiesos sampratos atstovai), negali būt naudojami matematikos objektams. Pati tikrovė esti daug abstraktesnė, dažnai nepasiduodanti žmogaus euristikai ir, net jei pripažįstame, kad ši tikrovė yra koherentiška ir vientisa, ir, kad vyksta atradimas, o ne kūryba, tai vis tiek turime pripažinti patį kardinaliausią skirtumą – matematikos plotmė pagrįsta aksiomomis, o gamta – ne. Nebent priimsime teiginį, kad gamta *a priori* turi kažkokias mums sunkiai pažįstamas logines aksiomas, bet tai sukelia labai daug naujų problemų. Esmė ta, jog juslinis pasaulis potencialiai gali egzistuoti be žmogaus proto ir veiklos, o matematika turi būti bent daliniai patalpinta ir išreikšta žmogiškojo *ratio*. Darosi aišku, jog klasikinė tiesos samprata nevisada gali padėti matematikai.  
Žinoma, tiesos sampratų yra ir daugiau – pavyzdžiui Dekarto. Jis manė, jog tiesa – akivaizdi ir lengvai suprantama. (Nekrašas, 1993) Bet, netgi atmetus subjektyvumą ir psichologiją, turbūt neviskas matematikoje lengvai suprantama, proto šviesa nušviečiama. Žinoma, galima daryti argumentą, jog žinant pradines aksiomas ir visas išvadas iš jų, visa matematika pasidaro elementari. Tačiau tuomet lieka kelios problemos. Viena iš jų – jei matematika yra išrandama (o ne atrandama), tai išvadų iš aksiomų, iš esmės, gali būti begalybė. Begalinis kiekis tiesų techniškai įmanomas, bet tai turėtų sukelti daug įvairių pasvarstymų. O jei matematika atrandama (tiesų kiekis yra limituotas), tai tada lieka atminties, suvokimo, žmogaus egzistencinio laikiškumo problemos.[[2]](#footnote-2) Kadangi Dekartiškoji tiesos samprata, iš esmės, susieja tiesą su žmogaus suvokimu (tiesa turi pakliūti į bendrą suvokimą) ir paverčią ją elementaria, šios problemos, jei lieka neįveiktos, kelia didžiulių sunkumų vartojant šią sampratą matematikoje.  
Egzistuoja ir koherentinė (loginės darnos) tiesos samprata. Ją vystė ne vienas filosofas, dažnai pasiremdamas Antikine tiesos samprata kaip pagrindu. Iš esmės, šio suvokimo atstovai teigia, jog tiesa yra loginis neprieštaringumas (Nekrašas, 1993). Atrodytų, jog tai puiki samprata matematikai, visgi, ji pagrįsta logika. Manau, jog čia iškyla dažnai pražiūrima filosofinė problema (ypač analitinių filosofų). Beveik visada yra tapatinama tiesa ir teiginio teisingumo vertė (teisingas teiginys ar klaidingas). Ši problema aiškiausiai pasimato priėjus prie aksiomų. Mes susitariame, jog jos yra tiesa. Tačiau čia verta pradėti nagrinėti kalbos santykį su tikrove, kadangi aksiomos neišvengiamai turi būti bent šiek tiek kalbiškos (matematinių simbolių dar „nėra“, jie nepagrįsti šioje stadijoje). Kad šitai paaiškėtų, reikėtų šiek tiek perbrėžti aksiomą – tai teiginys, kurio teisingumo vertė visada teigiama. Iš esmės, logika nagrinėja teiginių apie pasaulį teisingumą kitų teiginių apie pasaulį atžvilgiu (apie panašų dalyką kalba Richard Rorty (1989)). Tačiau nemanau, kad tai galima laikyti tiesa – ji turėtų išlikti tokia pati, nepriklausomai nuo jokių sąlygų, tačiau teiginiai apie pasaulį jau neišvengiamai talpina ir naikina tam tikras fenomenines patirtis ir jų dalis. Šitai palieka nemažai klausimų matematikai. Pavyzdžiui, ar aksiomos yra teiginiai apie pasaulį (turint galvoj fizinį, fenomeninį)? Žinoma, neišvengiama, kad jie yra teiginiai apie kažką. Čia iškyla klasikinė problema – ar yra realus matematinis pasaulis? Jei jo nėra, tuomet aksiomos yra teiginiai apie jutiminį pasaulį. Tačiau matematika, patalpinta į grynai empirinį suvokimą, taip pat turi problemų – apie tai kalbėjo Frege, kritikuodamas Mill‘io suvokimą (Frege, 1980). Dar daugiau problemų iškyla tada, kai apsvarstomas aksiomų tiesos (apie jų teisingumą bergždžia kalbėti) kriterijus. Kiekviena sukurta aksioma ar jų sistema matematiką nuves vis kitu keliu. Netgi panašios sistemos, tačiau labai minimaliai besiskiriančios tarpusavyje gali sukelti milžiniškus skirtumus tolimesniuose etapuose, kaip teigia chaoso teorijos atstovai, dar kartais vadinamas šis atvejis drugelio efektu. (Lorenz, 1972). Manau, kad ši samprata matematikai ir daug žadanti, ir daug problemų kelianti, bet viską išnagrinėti tikrai yra už šio darbo ir mano kompetencijų ribų.  
Lieka paskutinė dažnoji tiesos samprata, kuri turi keistą santykį su matematika – pragmatinė tiesos samprata. Jos tiesos kriterijus – žinių praktiškumas, naudingumas (Nekrašas, 1993). Šią sampratą labiausiai išvystė K. Marx‘as ir A. Comte‘as. Matematiką ši samprata pastato į keistą padėtį. Viena vertus, ji tikrai turi kažkokį santykį su empirine tikrove ir pritaikomumą, naudingumą kasdieniame gyvenime. Tačiau matematika nėra tik tiek (Frege kovojo su Mill‘io apibrėžimu dėl empirinio nepakankamumo). Pakankamai aišku, jog šis mokslas, bent jau moderniojoje savo dalyje yra jau *causa sui*[[3]](#footnote-3). Iš moderniosios matematikos kyla daugybė klausimų, kurie kelia abejonių apie susietumą su fenomenine tikrove (pavyzdžiui Banach‘o-Tarski‘o paradoksas). Taip pat, nagrinėjami tokie klausimai, kurie galbūt jokio poveikio pačiai realybei neturi, tik šiam mokslui (tokie klausimai kaip pirminių skaičių seka ir kaip ją išreikšti per vieną lygtį, *et cetera*). Todėl, matematikos į gryną pragmatiškumą patalpinti negalime. Tačiau, tęsiant ankstesnės sampratos liniją, galbūt praktiškai nepritaikomi teiginiai tėra teisingi, bet nėra tiesa? Atsakant į šį klausimą, aš manau, jog K. Marx‘as, iš esmės, sunaikina patį tiesos supratimą. Šioje sampratoje tiesa tampa tik darbo įrankiu (žinoma, tai pritaria ekonominei-socialinei Marx‘o teorijai), kuris keičiamas ir paklūsta visiškai žmogui. Tiesa pasidaro ypatingai reliatyvi,[[4]](#footnote-4) tampa tiesiog nerelevantiška apie ją kalbėti. Manau, jog matematikams į šią sampratą neverta kreipti ypatingai daug dėmesio – ji tik nužudytų šį mokslą anksčiau laiko.

MATEMATINĖ TIESA: AKSIOMOS

Sampratos jau išgvildentos, kiek tai leido mano suvokimas, o dabar laikas pradėti modernesnį diskursą. Jau buvo iškelti keli klausimai apie matematinę tiesą, tačiau dabar juos panagrinėkime atidžiau.  
Koks aksiomų santykis su realybe? Neišvengiamai kažkoks santykis turi būti – matematika pati nėra hermetiškas mokslas. Dar daugiau, aksiomos yra visos atšakos pradžia, todėl ji yra pati kalbiškiausia, o kalba, aišku, yra susijusi su realybės aprašymu. Žinoma, galima klausti kiek artimai susijusios aksiomos su fenomeniniu pasauliu, bet galbūt šį klausimą paliksiu nuošalyje, sąmoningai. Tačiau, manau, galima teigti, jog, jei iš aksiomų plaukia viskas kitkas matematikoje, tai jos yra labiausiai su realybe susiję teiginiai. Kodėl? Fizikinė metafora, galbūt, čia geriausiai parodytų mano poziciją. Pagal antrąjį termodinamikos dėsnį[[5]](#footnote-5) energija juda iš pilnesnės sistemos į mažiau pilną. Taip ir su matematinėmis aksiomomis – iš arčiausiai realybės esančių teiginių judama arba į vienodai susijusius (dėl šito turiu abejonių), arba į mažiau su ja susijusius. Atrodo pakankamai logiška teigi, jog aksiomos labiausiai susijusios su realybe[[6]](#footnote-6) (nors iš pirmo žvilgsnio gali taip neatrodyti). Tuomet, geriausios aksiomos yra tos, kurios labiausiai susijusios su realybe. Žinoma, visų jų teisingumo vertė vienoda, tačiau tiesos kriterijus tampa suartėjimas su minėtąja. Deja, turbūt nėra kito būdo atskirti geras aksiomos nuo nelabai, išskyrus istorinį ir matematinį bandymą išvesti išvadas. Tačiau kas iš to seka? Mano nuomone, keletas įdomių faktų. Pirmiausia, kadangi aksiomos yra kuriamos vis kitokios, kitokių asmenų ir, nors ir bandoma pasiekti tą patį tikslą (tai yra kuo geriau apibrėžti kažkokį matematinį objektą), tai iš jų seka skirtingos išvados. Jei jos logiškai pagrįstos, tai jos visos yra teisingos. Bet kartais susiduriame su itin keistomis išvadomis – visokiais paradoksais (minėtasis Banach‘o-Tarski‘o), kurie atrodo neigia santykį su realybe. Čia ir atsiskleidžia visas grožis iš to, kas anksčiau kalbėta. Pirmoji klaida yra tiesos ir teisingumo vertės sumaišymas. Paradoksai yra logiškai nuoseklūs, tačiau jie nėra susiję su realybe, nėra *tiesa par excellence*[[7]](#footnote-7). Pabandykime tai parodyti – jeigu aksiomos yra susijusios su realybe labiausiai, tačiau dar neatradome (arba nežinome, jog atradome) tobulų aksiomų, tai jos visos kažkiek prasilenkia su minėtąja. Nesvarbu kiek mažai jos prasilenkia, čia gali padaryti poveikį drugelio efektas – ilgame argumentavime atsiras „keistų“ išvadų. Tai ir turėtų būti visi paradoksai – logiškai nuoseklūs iš pradinės klaidos[[8]](#footnote-8), tiesiog ji sunkiai pastebima, nes mes neturime pilnos informacijos apie realybę, todėl negalime pastebėti būsimo nuokrypio iš anksto. Žinoma, čia slepiasi viena ypatinga prielaida, be kurios šis argumentavimas būtų nelabai įmanomas – įmanoma prieiti objektyvią (matematinę) tiesą.  
Panagrinėkime kitą įdomų klausimą – ar aksiomos ir matematiniai objektai egzistuoja fizinėje plotmėje, platoninėje realybėje ar tiesiog yra racionalaus proto išradimas? Manau pradėsiu nuo paprasčiausio – „tuščių sąvokų“ argumento. Jei mąstoma, jog matematiniai objektai niekaip nėra susiję su kažkokia realybe, tai tuomet verta pakalbėti apie sąvokų ir egzistavimo santykį. Čia tinka Bertrand‘o Russell‘o Parmenido poemos interpretacija (Russell, cit. pg. Palmer, 2012). Jei kalbama apie kažkokį daiktą, sąvoką, tai objektas, kurį apibrėžia žodis, turi kažkokia prasme egzistuoti kažkokioje plotmėje. Todėl „tuščios sąvokos“ ir panašūs argumentai atkrenta, jei nuosekliai nagrinėjame sąvokinio egzistavimo klausimą. Žinoma, lieka dar du variantai – egzistuoja fenomeninėje realybėje ar platoniškoje (iš esmės – matematinis empirizmas ir matematinis platonizmas)? Jei išlieku nuoseklus anksčiau apkalbėtai problemai, tuomet turėčiau pripažinti matematinį platonizmą. Jau vien todėl, jog, jei yra bent teoriškai įmanoma tobulai (ar tobulos) su realybe susijusi aksioma (-os), tai indikuoja, jog egzistuoja kažkokia tobula, nekintanti tikrovės apybraiža. Šito negalėtų priimti nei empiristas, nei nominalistas.  
Manau išnagrinėsiu dar vieną šiam darbui svarbų klausimą – kodėl įmanomos Gödel‘io teoremos? Gali būti keletas atsakymų. Vienas iš jų, beveik nesusijęs su šio skyriaus problematika – tai, kad nėra pakankamų logikos įrankių įveikti šią problemą[[9]](#footnote-9). Tačiau iš ankstesnių pasvarstymų kyla kitas sprendimas. Gödel‘is teigia (įrodo), jog aksiomų sistemose visada yra teisingų teiginių, tačiau neįrodomų iš sistemos vidaus (Panu, 2014). Manau, gali būti ir taip, jog čia vėl veikia aksiomų santykis su realybe, tačiau šįkart nėra būtinas drugelio efektas. Ta realybė, kurios konceptualiai neužgriebia netobulos aksiomos, lieka už sistemos ribų, tačiau tie teiginiai yra tiesa (ir, turbūt, teisingi). Kadangi, greičiausiai, tobulų sistemų turėti nėra įmanoma (tai primintų Platono idėjas), visuomet kažkas liks už jos ribų ir Gödel‘io teoremos liks teisingomis.

IŠVADOS

1. Pakankamai eksplikavus filosofines tiesos sampratas pasirodo, jog nei viena jų nėra pakankama matematikai. Kiekviena jų turi tam tikrų pranašumų kalbant apie šį mokslą, tačiau pilnai neužgriebia prasmės. Iš jų, žinoma, kyla daugelis matematinių ginčų (pavyzdžiui nominalizmo ir platonizmo) ir svarbių problemų. Šio darbo žiūros taškas – aksiomos pasirodo naujoje šviesoje, santykyje su realybe.
2. Aksiomas nagrinėjant kaip jungtinį matematinės ir kalbos filosofijos darinį galime pastebėti kitokį jų aspektą – santykį su realybe. Priimdami, jog bet kokios aksiomos yra visada teisingumos (pagal loginę prasmę), tačiau nevisada yra tiesa. Aksiomų tiesos kriterijus – kuo artimesnis ir geresnis santykis su tikrove.
3. Iš aksiomų netobulumo kyla keletas problemų. Paradoksai atsiranda iš mažų nukrypimų nuo tikrovės, kurie vėliau išryškėja argumentacijos ir atradinėjimo kelyje. Turbūt, panašiai esti ir su Gödel‘io teoremų išvadomis, žinoma, čia gali būti ne tik tai, bet ir logikos neišvystytumas ar kitos esmės.

LITERATŪRA

1. Frege, G. 1980. *The Foundations of Arithmetic*. Į anglų k. vertė: J. L. Austin, M. A.. Illinois: Northwestern University Press Evanston.
2. Glanzberg, M. 2014. Truth [interaktyvus]. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Prieiga per internetą: <http://plato.stanford.edu/entries/truth/> . [žiūrėta 2014 06 10]
3. Lorenz, E. N. 1972. Predictability; Does the flap of a butterfly’s wings in Brazil set off a tornado in Texas? [interaktyvus]. In: *AAAS Section on Enviromental Sciences New Approaches to Global Weather: GARP (The Global Atmospheric Research Program).* Cambridge: Massachusetts Institue of Technology. Pp 1-5. Prieiga per internetą: <http://eaps4.mit.edu/research/Lorenz/Butterfly_1972.pdf>.
4. Nekrašas, E. 1993. *Filosofijos įvadas* [interaktyvus]. Vilnius: Mokslo ir enciklopedijų leidykla. Prieiga per internetą: <http://www.fsf.vu.lt/dokumentai/katedros/filosofijos/Mickevi%C4%8Dius/Evaldas_Nekrasas_-_Filosofijos_Ivadas_lt.pdf>. [žiūrėta 2014 06 10].
5. Palmer, J. 2012. *Parmenides* [interaktyvus]. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2012 Edition)*. Prieiga per internetą: <http://plato.stanford.edu/archives/sum2012/entries/parmenides/>. [žiūrėta 2014 06 10].
6. Panu, R. 2014. Gödel's Incompleteness Theorems [interaktyvus]. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2014 Edition)*. Prieiga per internetą: <http://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/goedel-incompleteness/>. [žiūrėta 2014 06 10].
7. Rorty, R. 1989. *Contingency, irony, and solidarity* [interaktyvus]. Melbourne: Cambridge University Press. Pp. 3-23. Prieiga per internetą: <http://pages.uoregon.edu/koopman/courses_readings/rorty/rorty_CIS_full.pdf>. [žiūrėta 2014 06 10].

1. Čia sąmoningai vartojamas žodis tiesa vietoj teisingumas, kitame skyriuje tai aptariama. [↑](#footnote-ref-1)
2. Čia būtų galima pasvarstyti kitokius, įdomius filosofinius klausimus. Pavyzdžiui: ar tiesa gali būti pilnai (arba išvis) suvokta žmogiškojo proto? Juk kažkokie teiginiai, kurie būtų pasaulio aprašymo aksiomos gali būti netgi neišreiškiamos jokia kalba (bent dabartinėmis egzistuojančiomis) ar išvis neapčiuopiama nei protu, nei juslėmis. [↑](#footnote-ref-2)
3. Priežastis pati sau (lot.) [↑](#footnote-ref-3)
4. Tiesa, šiuo atveju, priklauso ne tik nuo individo, kuris nusprendžia kaip panaudoti idėją, laikomą tiesa, bet ir nuo istorinio, ekonominio ir visų kitų kontekstų (pavyzdžiui, tai kas feodalizme buvo tiesa, tampa netiesa kapitalizme ir panašiai). [↑](#footnote-ref-4)
5. Čia šiek tiek supaprastinu dėsnį ir jo visas implikacijas, tačiau tai tik dėl paaiškinimo. [↑](#footnote-ref-5)
6. Šioje vietoje netgi nesvarbu ar su fizine ar su matematine, platonine realybe. Aksiomos vis tiek su kažkuria iš jų yra susijusios. [↑](#footnote-ref-6)
7. Puikiausias pavyzdys (pranc.) [↑](#footnote-ref-7)
8. Techniškai kalbant tai turbūt net nėra klaida, o kažkas kita. [↑](#footnote-ref-8)
9. Tiesa, dar gali būti, kad logikos taisyklės turi tą pačią problemą (santykį) kaip ir aksiomos, todėl jas reikėtų nuolat taisyti. [↑](#footnote-ref-9)