# Kodėl reikėtų moksleivius supažindinti su matematika? (III)

▷ Pabaiga. Pradžia – Nr. 21, 23

Habil. dr. **Rimas NORVAIŠA**

## DIDAKTINĖ MATEMATIKOS TRANSFORMACIJA – naujos matematikos taikymo srities objektas

### • Skaičių tiesė trupmenoms – tas pats, kas penki pirštai natūraliesiems skaičiams

Iš šiuolaikinės matematikos ir mokyklinės matematikos aptarimo („Dialogas“, Nr. 23 – *red. pastaba*) matyti, kad tai yra dvi skirtingos veiklos. Norint jas susieti, būtina keisti nusistovėjusius stereotipus. Matematikų bendruomenė turėtų atsisakyti požiūrio, kad mokyklinės matematikos problemos nėra vertos jų dėmesio dėl savo paprastumo. Savo ruožtu edukologų bendruomenė galėtų suabejoti edukologijos mokslo galimybėmis spręsti mokyklinės matematikos problemas.

Maždaug prieš 15 metų amerikiečių matematikas Hung-Hsi Wu pasiūlė matematiškai nepriekaištingą ir mokyklai tinkamą trupmenų apibūdinimo būdą. Trupmenos sąvoką jis susiejo su geometrinės tiesės tašku ir parodė, kad visos trupmenų savybės ir veiksmai su trupmenomis paaiškinami tokia skaičiaus samprata. Būtent šių savybių trūksta mokykloje naudojamai trupmenos sampratai. Taip apibrėžta trupmena turi racionaliojo skaičiaus vienaties savybę, o tai įgalina matematiškai korektiškai apibrėžti aritmetikos veiksmus su trupmenomis. Dar daugiau, ta pati idėja tinka mokyklinėje matematikoje apibrėžti realiuosius skaičius, kiekvieną iš jų tapatinant su atitinkamu tašku ant geometrinės tiesės. Tokiu būdu abstrakti aritmetikos sąvoka susiejama su santykinai paprastesniu geometrijos objektu. Skaičių tiesė trupmenoms tampa tuo pačiu, kas penki pirštai yra natūraliesiems skaičiams.

Hung-Hsi Wu darbo rezultatas yra vertintinas kaip supaprastintas, bet šiuolaikinės matematikos požiūriu logiškai tikslus aritmetikos variantas. Jo knyga *Understanding Numbers in Elementary School Mathematics* (AMS, USA, 2011) skirta matematikos mokytojams.

Prieš naudojant šį metodą mokykloje, reikalingas didaktinis paruošimas. Pats metodas yra šiuolaikinės matematikos didaktinės transformacijos pavyzdys.

### • Trys matematikos didaktikos klausimai

Matematikos didaktinė transformacija nėra tas pats, kas didaktika.

Matematikos didaktika yra socialinis mokslas, kurio objektas – matematikos mokymo ir mokymosi procesas įvairių tipų ir lygių mokyklose. Matematikos didaktika kelia sau uždavinius atsakyti į klausimus[1]:

• kokie turėtų būti šiandienos matematikos mokymo tikslai bei principai;

• koks turėtų būti matematikos mokymo turinys bei jo mokymo struktūra;

• kokios technologijos pajėgios užtikrinti mokymo ir mokymosi kokybę, atliepiančią visuomenės poreikius.

Be abejonės, visi trys klausimai yra fundamentalūs. Vienaip ar kitaip jie susiję su matematika, jos istorija ir filosofija, psichologija, neuromokslu, filosofija, semiotika ir kitomis žinių sritimis. Abejonių kelia, ar socialinis mokslas pajėgus vienas atsakyti į visus šiuos tris klausimus.

Kas galėtų paneigti, kad matematikos didaktikos atsakymų į šiuos tris klausimus pasekmė yra laike įstrigęs matematikos mokymas?

### • Matematikos mokymas – mokslų ir studijų klasifikacijos užribyje

Matematikos didaktinė transformacija galėtų būti matematikos taikymo užduotis. Šiuolaikinės matematikos žinioms reikia suteikti tokią formą, kuri būtų suprantama matematikos mokytojams, moksleiviams ir visuomenei. Siekiant, kad supaprastintoje matematikos žinių formoje išliktų samprotavimų loginis tikslumas, būtinas aktyvus matematikų bendruomenės įsikišimas. Norint supaprastintai, bet tiksliai išreikšti šiuolaikinės matematikos požiūrį į elementariosios matematikos objektus, reikalinga aukšta matematinė branda. Tokia branda paprastai atsiranda ilgą laiką atliekant matematikos tyrimus. Tokią matematikos taikymo sritį Hung-Hsi Wu siūlo vadinti *matematikos inžinerija*[2].

Matematikos inžinerija turėtų būti svarbiausia studijų sritis ruošiant matematikos mokytojus. Tokios srities įsisavinimas yra neįmanomas be gilių matematikos studijų. Tačiau dabartinės Švietimo ir mokslo ministerijos politikos dėka matematikos mokytojų ruošimas VU ir LEU tapo socialinių mokslų prerogatyva. Pavyzdžiui, VU studijų programa „Matematikos ir informatikos mokymas“ 2010 m. buvo perregistruota į Socialinių mokslų srities Pedagogikos kryptį. Šios programos vykdytojai pripažįsta, kad sprendimas buvo priimtas labai nenoromis ir nulemtas ministerijos finansinių svertų.

Dar daugiau, mūsų mokslo politika yra sukūrusi tokias sąlygas, kurios nemotyvuoja mokslininkų dalyvavimo švietėjiškoje veikloje. Pavyzdžiui, mokslo institucijos finansuojamos tik už vadinamąją „mokslinę produkciją“. Nors mokslo institucijų ataskaitose yra su mokslo populiarinimu susijusių klausimų, praktiškai ši veikla yra nuostolinga institucijai. „Mokslinės produkcijos“ kiekybinis reikalavimas dominuoja atestuojant mokslininkų veiklą. Nors atestacijos nuostatai leidžia institucijoms savo nuožiūra praplėsti teigiamai vertinamų veiklų sąrašą, jos nesuinteresuotos to daryti dėl finansinių svertų.

Dėl šių ir daugelio kitų švietimo ir mokslo politikos aplinkybių matematikos inžinerijos vystymas, o tuo pačiu ir kokybiškas matematikos mokytojų ruošimas, yra labai apsunkinti.

### • Matematikos mokymas ir šiuolaikinės technologijos

Kitas matematikos mokymą veikiantis šaltinis yra technologijų pažanga. Dalis žmonių mano, kad matematikos mokymo problemas galėtų išspręsti šiuolaikinės technologijos. Jų teigimu, didžioji mokyklinės matematikos turinio dalis niekada nebus reikalinga gyvenime, nes šiuolaikinės technologijos gali daug geriau už žmogų atlikti aritmetines procedūras. Aktyvus šio požiūrio populiarintojas Conradas Wolframas (gerai žinomos kompiuterinės programos *Mathematica* autoriaus Stepheno Wolframo brolis) teigia, kad vietoj aritmetikos procedūrų moksleivius pakanka mokyti kurti kompiuterines programas.

Šiuolaikinių technologijų entuziastų požiūris remiasi prielaida, kad matematinis abstrakcijų pasaulis pasiekiamas tiesiogiai be nuoseklaus paprastesnių sąvokų įsisavinimo. Šią prielaidą paneigia *Carnegie Mellon* universiteto profesoriaus R.S.Sieglerio vadovaujamos mokslininkų grupės tyrimo rezultatai[3].

Mokslininkai tyrė dvi moksleivių grupes: vieną jų sudarė amerikiečių, o kitą – Anglijos moksleiviai. Buvo tiriamos šių moksleivių matematikos žinios jiems būnant 10-ies ir 16-os metų amžiaus. 2012 m. birželį paskelbti rezultatai rodo, kad vidurinio mokslo algebros žinias lemia trupmenų ir sveikųjų skaičių dalybos žinios.

Šios pastabos nereiškia, kad šiuolaikinės technologijos negali padėti matematikos mokymui. Problema yra tik technologijų ir jų kuriamos ekonominės naudos sureikšminimas, lyginant su žinių įgijimu ir jų reikšme tinkamai naudojantis technologinėmis priemonėmis. Technologijų kuriamos galimybės neturėtų eliminuoti nuoseklaus matematikos mokymo.

***

Moksleivius reikia supažindinti su matematika, nes ji išplečia suvokiamos realybės ribas. Realybe tampa ne tik jutimais užčiuopiamas vaizdas, bet ir protu suvokiamas abstrakcijų pasaulis. Kiek šis pasaulis mums, lietuviams, bus prieinamas, priklauso nuo mūsų mokyklinės matematikos kokybės.

[1] V.Sičiūnienė. Matematikos didaktika. VPU leidykla, 2010.

[2] H.-H.Wu. How mathematicians can contribute to K-12 mathematics education. Proceedings of International Congress of Mathematicians, Madrid 2006, Volume III, European Mathematical Society, Zürich, 2006, 1676–1688.

[3] R.S.Siegler ir kiti. Early Predictors of High Schools Mathematics Achievement. Psychological Science, 2012, June 14.

**EGZAMINAI**

# MVBE užduoties komentaras

**Birželio 5 d. Lietuvos abiturientai laikė matematikos valstybinį brandos egzaminą (MVBE). Kai kas jo užduotį vertina kaip labai lengvą (pvz., KTUG direktorius B.Burgis), kai kas – kaip lengvą, bet vietomis „suktą“, kai kas – kaip labai sunkią. Klausimų apie šią MVBE užduotį sulaukė ir straipsnio „Kodėl reikėtų moksleivius supažindinti su matematika? (II)“ autorius R.Norvaiša (*www.dialogas.com*). Siūlome kelis matematiko komentarus šia aktualia tema.**

***Matematikos mokytoja***: „Straipsnio autoriui. Gal galėtumėte pakomentuoti šių metų matematikos VBE užduotį? Ypač 15, 24 ir 29 uždavinius. Ačiū.“

***Rimas Norvaiša***: „Dabar galėčiau pakomentuoti tik nurodytus uždavinius. Apibendrinančių išvadų apie šių metų matematikos VBE negaliu daryti, nes nesigilinau. Bet būtų įdomu rimtai panagrinėti visas užduotis.

15 užduotis. Duota, kad a, b ir c yra aibės {1, 2, …, 10} elementai. Naudojant tvarkos tarp trupmenų savybes, reiškinys (a+b)/c didžiausią reikšmę įgyja, kai a=b=10 ir c=1.

24 užduotis. Tegul x yra 20% druskos tirpalo kiekis, kurį galime įpilti į indą. Tada x yra bet kuris skaičius iš intervalo [0,3]. Reikia paskaičiuoti, kokią dalį (procentais) sudaro 0,3+0,2x druskos 2+x l talpos tirpale. Jei neklystu, tai bus 20–10/(2+x)%. Ši funkcija didžiausią reikšmę 18% įgyja, kai x=3.

29 užduotis. Matyt, šį uždavinį galima interpretuoti kaip dviejų rūšių rutulių traukimą iš urnos be grąžinimo (bet sąlyga aiškiai to nenurodo). Tegul A1, A2, A3 yra įvykiai, kad 1-u, 2-u, 3-u, atitinkamai, bandymu bus ištrauktas bilietas pirmoje eilėje. Reikalingą įvykį sudaro trys nesutaikomi įvykiai A1A2(neA3), A1(neA2)A3, (neA1)A2A3.

Reikia suskaičiuoti šių įvykių tikimybes. Pirmoji tikimybė P(A1A2(neA3))=P(A1)P(A2|A1)P(neA3|A1A2)=(4/6)(3/5)(1/2)=1/5 ir t. t. Sustatome ir gauname atsakymą.“

***Suinteresuota***: „15 užduotis. Bet a ir b – tai ne tie patys skaičiai? Kodėl įvardyta skirtingomis raidėmis?“

***Rimas Norvaiša***: „Atsakau į klausimą. 15 užduotyje teigiama, kad a, b, c yra simboliai ir kiekvienas iš jų žymi aibės {1, 2, …, 10} elementą. Tai reiškia, kad a ir b gali žymėti tą patį elementą. Lygiai taip pat suprantama, kai sakoma, kad m/n yra trupmena, m yra sveikasis skaičius ir n yra natūralusis skaičius. Atskiru atveju m ir n gali būti tas pats skaičius, nors raidės m ir n skirtingos.

Tai, ką pasakiau, yra tam tikras matematinės kalbos paaiškinimas. Ši kalba atspindi gilesnius matematikos dalykus. Šiuo atveju matematinio objekto (skaičiaus) ir matematinio objekto vardo sampratas. Manau, kad mokyklinėje matematikoje šie dalykai nėra pakankamai paaiškinami. Vaizdžiai kalbant, vaikai mokosi matematikos kalbos pagal jos vartojimo praktiką. Panašiai būtų, jei mokantis lietuvių kalbą nebūtų aiškinama jos gramatika.“