Kelios skaičių biografijos akimirkos

Rimas Norvaiša

2019 kovo 21, Vilniaus jėzuitų gimnazija

Paskaitos tikslas

Papasakoti apie skaičių atsiradimo matematikoje svarbiausius epizodus.
Daugiausia dėmesio skiriu iracionaliesiems skaičiams.

Skaičių atsiradimas

1. Vieni daiktai pradėti reikšti kitais, paprastesniais, daiktais maždaug prieš 200 000 metų.
2. Skaičiai taip pat atsirado kaip simboliai, kalba, išreiškianti reikalingą informaciją apie daiktus, kurių neįnoma nešioti su savimi.
3. Šiais laikais skaičius ir jo simbolinė išraiška yra skirtingi dalykai. Jie nusakomi skirtingomis savybėmis.

Skaičių atsiradimas

1. Vieni daiktai pradėti reikšti kitais, paprastesniais, daiktais maždaug prieš 200 000 metų.
2. Skaičiai taip pat atsirado kaip simboliai, kalba, išreiškianti reikalingą informaciją apie daiktus, kurių neįnoma nešioti su savimi.
3. Šiais laikais skaičius ir jo simbolinė išraiška yra skirtingi dalykai. Jie nusakomi skirtingomis savybėmis.

Skaičių atsiradimas

1. Vieni daiktai pradėti reikšti kitais, paprastesniais, daiktais maždaug prieš 200 000 metų.
2. Skaičiai taip pat atsirado kaip simboliai, kalba, išreiškianti reikalingą informaciją apie daiktus, kurių neįnoma nešioti su savimi.
3. Šiais laikais skaičius ir jo simbolinė išraiška yra skirtingi dalykai. Jie nusakomi skirtingomis savybėmis.

Ishango bone

Figure: ©afrolegends.com

Skaičių simbolizavimo būdas grupuojant.

Manoma, kad šių kaulų amžius apie 20000 metų.

Ishango bone

Figure: ©afrolegends.com

Skaičių simbolizavimo būdas grupuojant.

Manoma, kad šių kaulų amžius apie 20000 metų.

Ishango bone

Figure: ©afrolegends.com

Skaičių simbolizavimo būdas grupuojant.

Manoma, kad šių kaulų amžius apie 20000 metų.

Aritmetikos atsiradimas

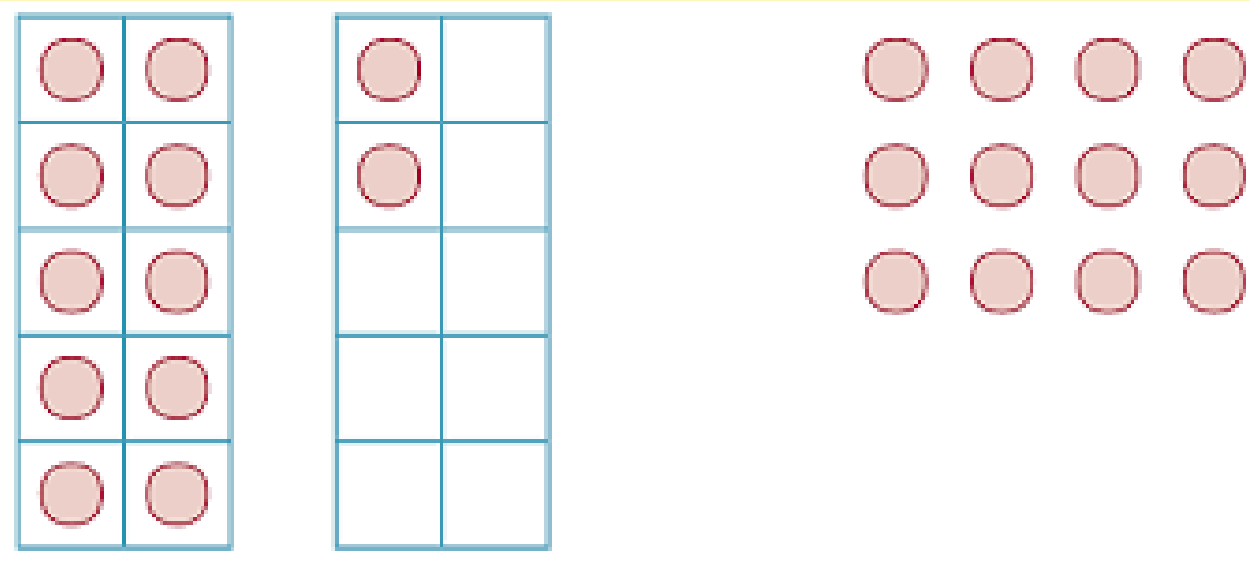


Figure: Grupavimas

Kaip susikalbėti tarp genčių, kurios grupuoja skirtingai?

Aritmetikos atsiradimas

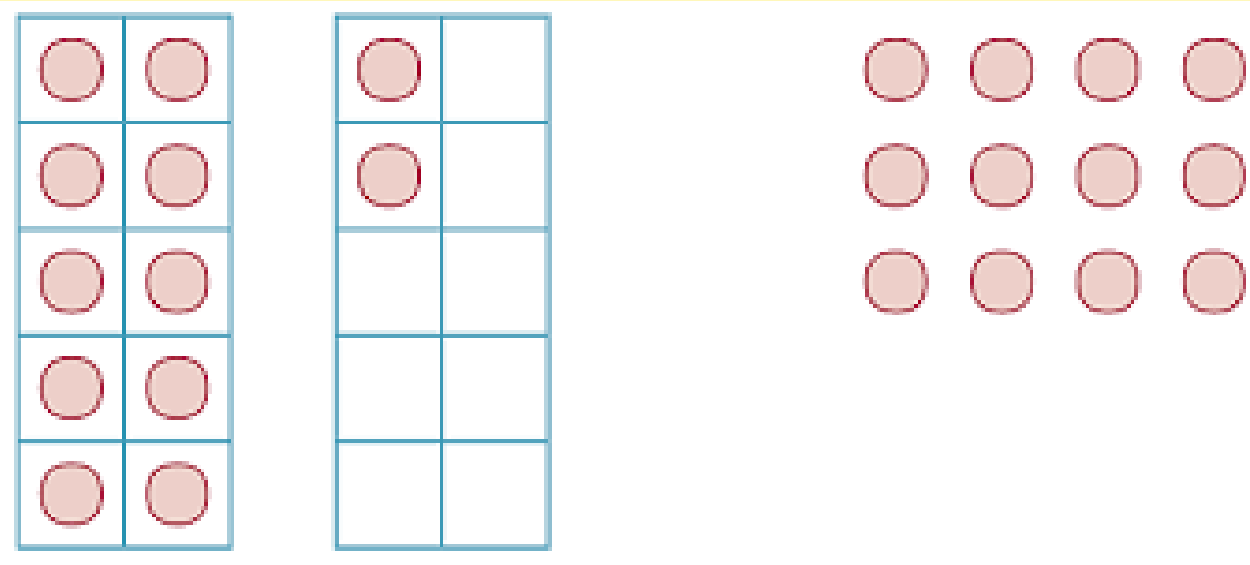


Figure: Grupavimas

Kaip susikalbėti tarp genčių, kurios grupuoja skirtingai?

Senovės Egipto skaičiavimo sistema

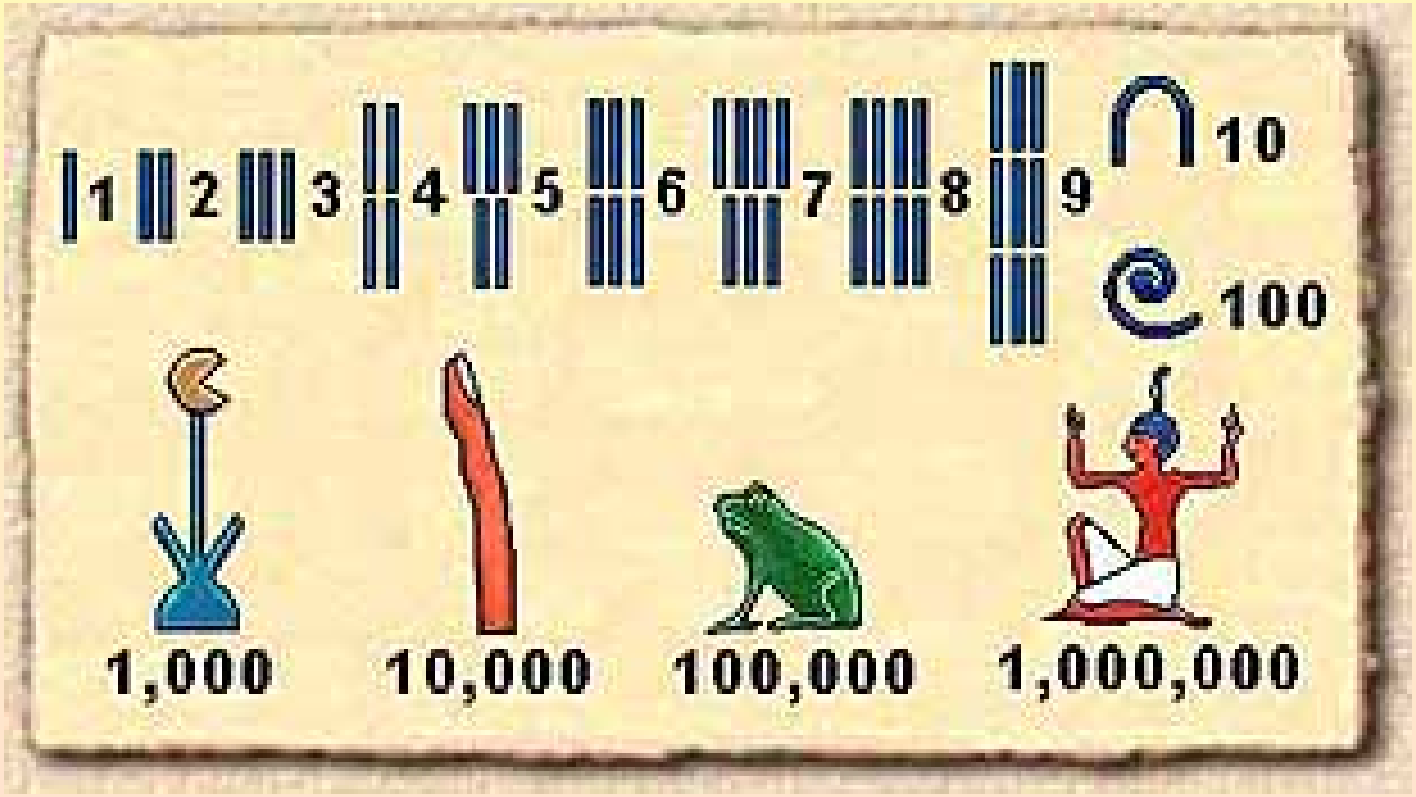


Figure: Egiptiečių skaitmenys

Trupmenos

1. Kaip padalinti 7 obuolius 4 vaikams?
2. Pirma, duodame kiekvienam vaikui po 1 obuolį ir lieka padalinti 3 obuolius 4 vaikams.
3. Likusius 3 obuolius perpjauname pusiau išdalindami 4 puses ir lieka dvi pusės.
4. Likusias dvi puses dar perpjauname pusiau ir išdaliname 4 vaikams.
5. Kiekvienam vaikui davėme: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.
6. Taip skaičiuotų senovės egiptiečiai. Šiais laikais dalintume taip: $1 + \frac{3}{4}$, naudodami ,,vulgarias trupmenas" $\frac{3}{4}$.

Trupmenos

1. Kaip padalinti 7 obuolius 4 vaikams?
2. Pirma, duodame kiekvienam vaikui po 1 obuolį ir lieka padalinti 3 obuolius 4 vaikams.
3. Likusius 3 obuolius perpjauname pusiau išdalindami 4 puses ir lieka dvi pusės.
4. Likusias dvi puses dar perpjauname pusiau ir išdaliname 4 vaikams.
5. Kiekvienam vaikui davėme: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.
6. Taip skaičiuotų senovės egiptiečiai. Šiais laikais dalintume taip: $1 + \frac{3}{4}$, naudodami „vulgarias trupmenas" $\frac{3}{4}$.

Trupmenos

1. Kaip padalinti 7 obuolius 4 vaikams?
2. Pirma, duodame kiekvienam vaikui po 1 obuolį ir lieka padalinti 3 obuolius 4 vaikams.
3. Likusius 3 obuolius perpjauname pusiau išdalindami 4 puses ir lieka dvi pusės.
4. Likusias dvi puses dar perpjauname pusiau ir išdaliname 4 vaikams.
5. Kiekvienam vaikui davėme: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.
6. Taip skaičiuotų senovės egiptiečiai. Šiais laikais dalintume taip: $1 + \frac{3}{4}$, naudodami „vulgarias trupmenas" $\frac{3}{4}$.

Trupmenos

1. Kaip padalinti 7 obuolius 4 vaikams?
2. Pirma, duodame kiekvienam vaikui po 1 obuolį ir lieka padalinti 3 obuolius 4 vaikams.
3. Likusius 3 obuolius perpjauname pusiau išdalindami 4 puses ir lieka dvi pusės.
4. Likusias dvi puses dar perpjauname pusiau ir išdaliname 4 vaikams.
5. Kiekvienam vaikui davėme: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.
6. Taip skaičiuotų senovės egiptiečiai. Šiais laikais dalintume taip: $1 + \frac{3}{4}$, naudodami ,,vulgarias trupmenas" $\frac{3}{4}$.

Trupmenos

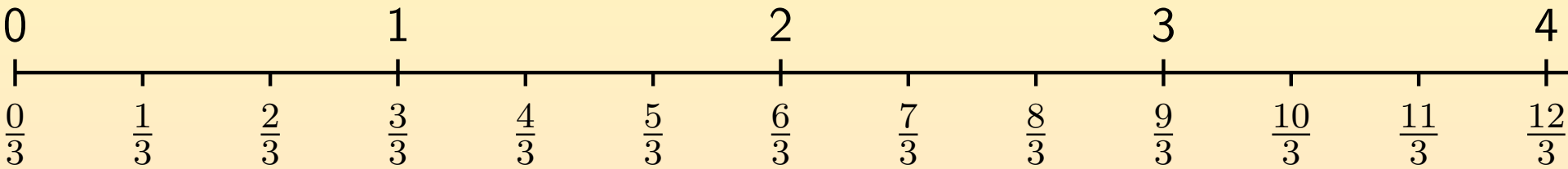
1. Kaip padalinti 7 obuolius 4 vaikams?
2. Pirma, duodame kiekvienam vaikui po 1 obuolį ir lieka padalinti 3 obuolius 4 vaikams.
3. Likusius 3 obuolius perpjauname pusiau išdalindami 4 puses ir lieka dvi pusės.
4. Likusias dvi puses dar perpjauname pusiau ir išdaliname 4 vaikams.
5. Kiekvienam vaikui davėme: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.
6. Taip skaičiuotų senovės egiptiečiai. Šiais laikais dalintume taip: $1 + \frac{3}{4}$, naudodami ,,vulgarias trupmenas" $\frac{3}{4}$.

Trupmenos

1. Kaip padalinti 7 obuolius 4 vaikams?
2. Pirma, duodame kiekvienam vaikui po 1 obuolį ir lieka padalinti 3 obuolius 4 vaikams.
3. Likusius 3 obuolius perpjauname pusiau išdalindami 4 puses ir lieka dvi pusės.
4. Likusias dvi puses dar perpjauname pusiau ir išdaliname 4 vaikams.
5. Kiekvienam vaikui davėme: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.
6. Taip skaičiuotų senovės egiptiečiai. Šiais laikais dalintume taip: $1 + \frac{3}{4}$, naudodami ,,vulgarias trupmenas" $\frac{3}{4}$.

Trupmenos skaičių tiesėje

Skaičių tiesė yra geometrinė tiesė, kurioje taškai tapatinami su skaičiais.

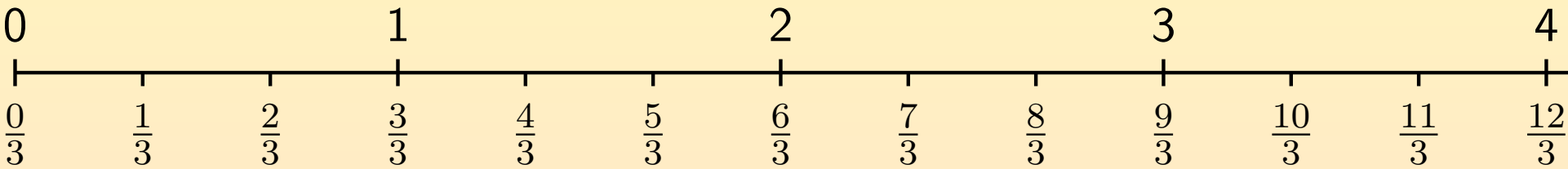


Ar skaičių tiesėje yra taškų, kurių neįmanoma sutapatinti su trupmena?

Ar įmanoma atsakyti į šį klausimą naudojant fizikinį eksperimentą?

Trupmenos skaičių tiesėje

Skaičių tiesė yra geometrinė tiesė, kurioje taškai tapatinami su skaičiais.

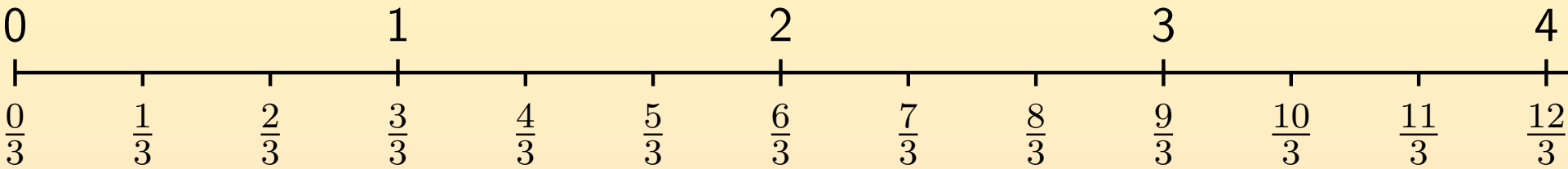


Ar skaičių tiesėje yra taškų, kurių neįmanoma sutapatinti su trupmena?

Ar įmanoma atsakyti į šį klausimą naudojant fizikinį eksperimentą?

Trupmenos skaičių tiesėje

Skaičių tiesė yra geometrinė tiesė, kurioje taškai tapatinami su skaičiais.



Ar skaičių tiesėje yra taškų, kurių neįmanoma sutapatinti su trupmena?

Ar įmanoma atsakyti į šį klausimą naudojant fizikinį eksperimentą?

Pitagoriečiai

Figure: ©en.wikipedia.org

Pitagoras gyveno 570 - 495 m prieš Kristaus gimimą Jonijoje, vienoje iš senovės graikų žemių.

Pitagoriečiai

Dvi atkarpos A ir B vadinamos bendramatėmis, jei egzistuoja toks skaičius v, kad šių atkarpų ilgiai yra

$$|A| = vm \quad \text{ir} \quad |B| = vn,$$

čia m ir n yra natūralieji skaičiai. Šiuo atveju

$$\frac{|A|}{|B|} = \frac{m}{n}.$$

Pitagoriečiai sugebėjo įrodyti, kad vienetinio kvadrato kraštinė ir diagonalė nėra bendramatės atkarpos. Gal būū Hippasus iš Metaponto 5-ame amžiuje iki Kristaus gimimo.

Tai sugriovė pitagoriečių pasaulėžiūrą, pagrįstą natūraliųjų skaičių svarba.

Pitagoriečiai

Dvi atkarpos A ir B vadinamos bendramatėmis, jei egzistuoja toks skaičius v, kad šių atkarpų ilgiai yra

$$|A| = vm \quad \text{ir} \quad |B| = vn,$$

čia m ir n yra natūralieji skaičiai. Šiuo atveju

$$\frac{|A|}{|B|} = \frac{m}{n}.$$

Pitagoriečiai sugebėjo įrodyti, kad vienetinio kvadrato kraštinė ir diagonalė nėra bendramatės atkarpos. Gal būū Hippasus iš Metaponto 5-ame amžiuje iki Kristaus gimimo.

Tai sugriovė pitagoriečių pasaulėžiūrą, pagrįstą natūraliųjų skaičių svarba.

Netrukus įrodysime

Teigimys [Plyšys]

Skaičių tiesėje yra taškas, kurio negalima išreikšti trupmena.

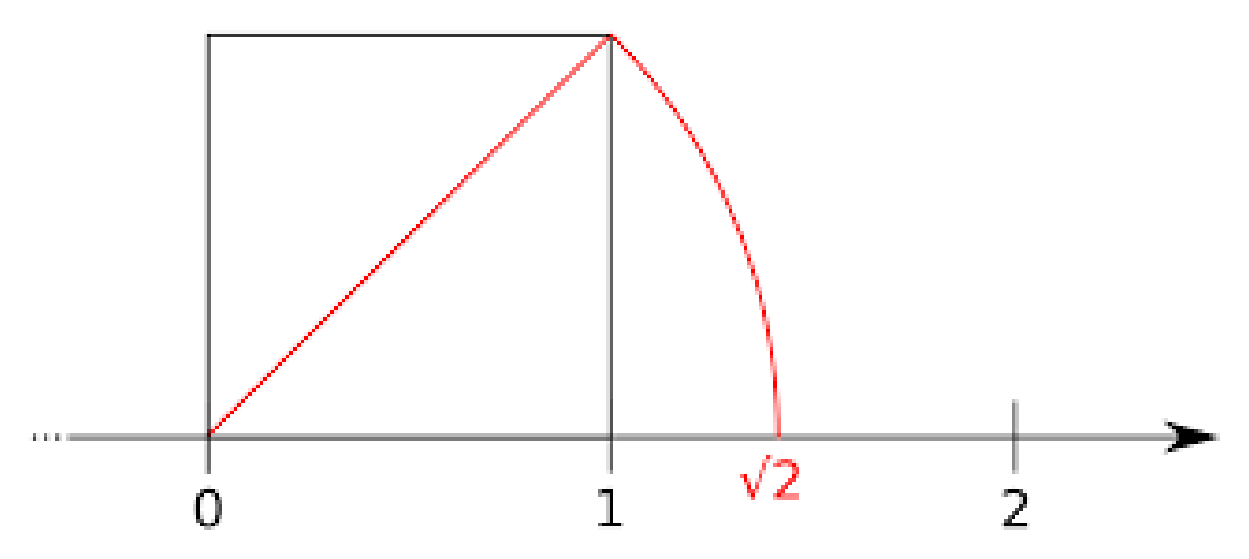


Figure: ©commons.wikipedia.org

$$(\sqrt{2})^2 = 2 = 1^2 + 1^2.$$

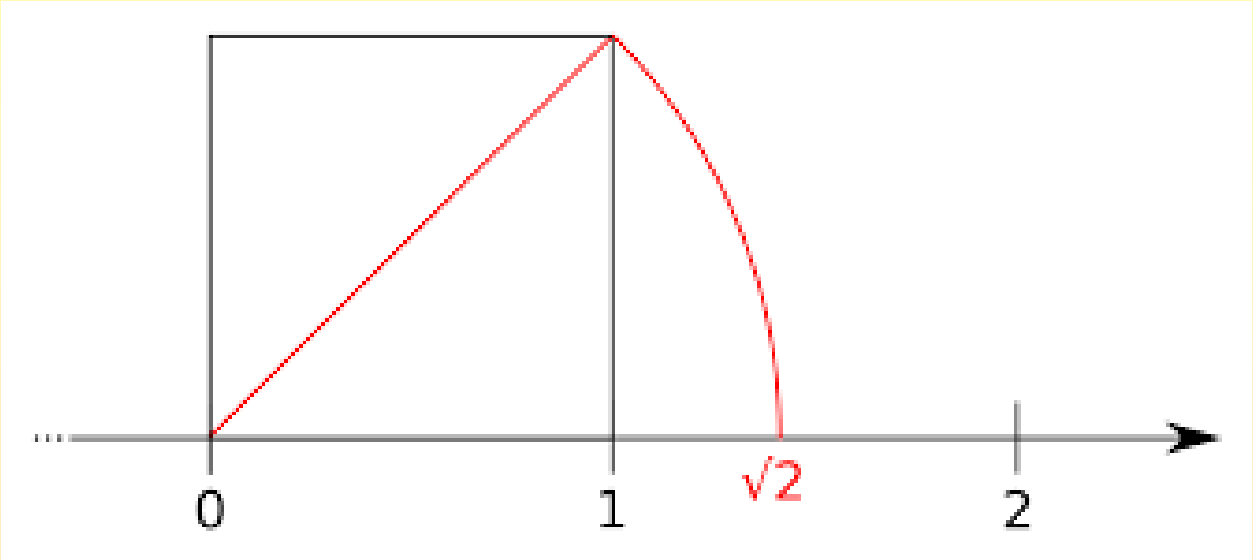


Figure: ©commons.wikipedia.org

$$(\sqrt{2})^2 = 2 = 1^2 + 1^2.$$

Patikslinimas

Teiginys [Plyšys taške $\sqrt{2}$]:

$\sqrt{2}$ atitinkantis taškas skaičių tiesėje nėra išreiškiamas trupmena.

Nelyginiai ir lyginiai skaičiai

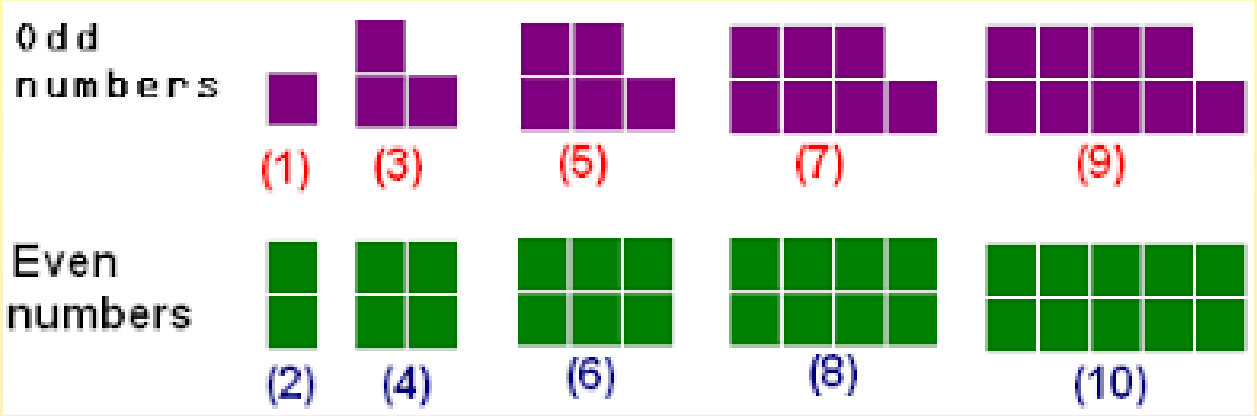


Figure: ©tes.com

Pratimas:

Bet kurių dviejų nelyginių skaičių suma yra lyginis skaičius.

Kaip įrodyti teiginį, kuris būtų teisingas begaliniam kiekiui objektų?

Nelyginiai ir lyginiai skaičiai

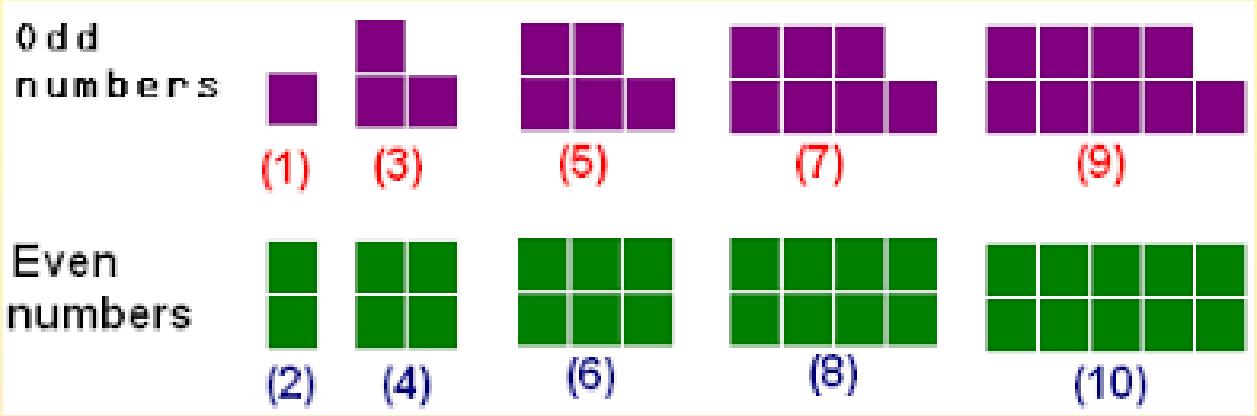


Figure: ©tes.com

Pratimas:

Bet kurių dviejų nelyginių skaičių suma yra lyginis skaičius.

Kaip įrodyti teiginį, kuris būtų teisingas begaliniam kiekiui objektų?

Nelyginiai ir lyginiai skaičiai

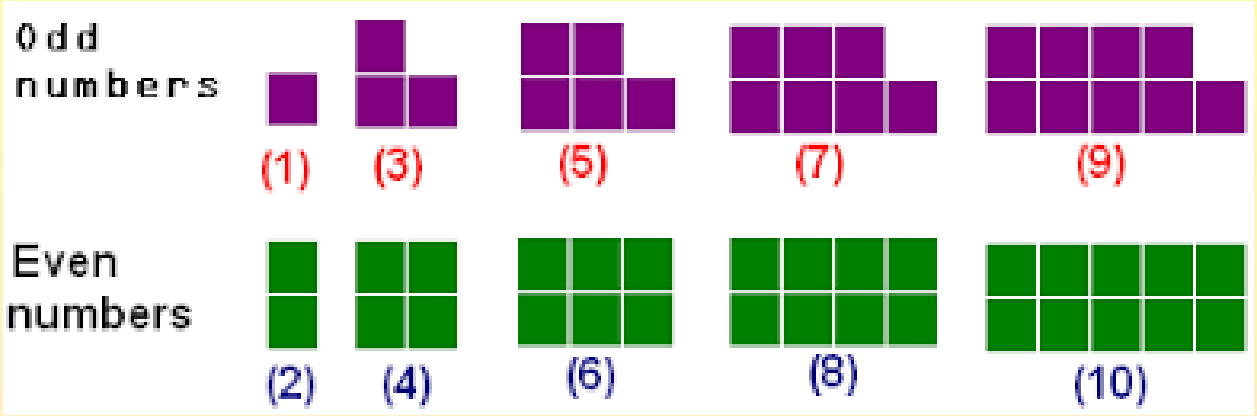


Figure: ©tes.com

Pratimas:

Bet kurių dviejų nelyginių skaičių suma yra lyginis skaičius.

Kaip įrodyti teiginį, kuris būtų teisingas begaliniam kiekiui objektų?

Natūraliuosius skaičius $1, 2, 3, \ldots$ žymėsime raidėmis n, m, k, ℓ.

Tada trupmenos išreiškiamos santykiais $\frac{m}{n}$ arba $\frac{k}{\ell}$.

n *nelyginis*, jei $n = 2k + 1$ su kuriuo nors k.

n yra *lyginis*, jei $n = 2k$ su kuriuo nors k.

Natūraliuosius skaičius $1, 2, 3, \ldots$ žymėsime raidėmis n, m, k, ℓ.

Tada trupmenos išreiškiamos santykiais $\frac{m}{n}$ arba $\frac{k}{\ell}$.

n *nelyginis*, jei $n = 2k + 1$ su kuriuo nors k.

n yra *lyginis*, jei $n = 2k$ su kuriuo nors k.

Natūraliuosius skaičius $1, 2, 3, \ldots$ žymėsime raidėmis n, m, k, ℓ.

Tada trupmenos išreiškiamos santykiais $\frac{m}{n}$ arba $\frac{k}{\ell}$.

n *nelyginis*, jei $n = 2k + 1$ su kuriuo nors k.

n yra *lyginis*, jei $n = 2k$ su kuriuo nors k.

Natūraliuosius skaičius $1, 2, 3, \ldots$ žymėsime raidėmis n, m, k, ℓ.

Tada trupmenos išreiškiamos santykiais $\frac{m}{n}$ arba $\frac{k}{\ell}$.

n *nelyginis*, jei $n = 2k + 1$ su kuriuo nors k.

n yra *lyginis*, jei $n = 2k$ su kuriuo nors k.

Pratimas:

Bet kurių dviejų nelyginių skaičių suma yra lyginis skaičius.

Įrodymas:

$$n = 2k + 1 \quad \text{ir} \quad m = 2\ell + 1.$$

$$n + m = (2k + 1) + (2\ell + 1) = 2(k + \ell + 1).$$

Q.E.D. = "Ką ir reikėjo įrodyti".

Pratimas:

Bet kurių dviejų nelyginių skaičių suma yra lyginis skaičius.

Įrodymas:

$$n = 2k + 1 \quad \text{ir} \quad m = 2\ell + 1.$$

$$n + m = (2k + 1) + (2\ell + 1) = 2(k + \ell + 1).$$

Q.E.D. = "Ką ir reikėjo įrodyti".

Pratimas:

Bet kurių dviejų nelyginių skaičių suma yra lyginis skaičius.

Įrodymas:

$$n = 2k + 1 \quad \text{ir} \quad m = 2\ell + 1.$$

$$n + m = (2k + 1) + (2\ell + 1) = 2(k + \ell + 1).$$

Q.E.D. = "Ką ir reikėjo įrodyti".

Pratimas:

Bet kurių dviejų nelyginių skaičių suma yra lyginis skaičius.

Įrodymas:

$$n = 2k + 1 \quad \text{ir} \quad m = 2\ell + 1.$$

$$n + m = (2k + 1) + (2\ell + 1) = 2(k + \ell + 1).$$

Q.E.D. = "Ką ir reikėjo įrodyti".

Kvadratų savybė:

Jei skaičiaus kvadratas lyginis, tai pats skaičius taip pat lyginis.

Įrodymas. Tarkime, kad n^2 lyginis. Reikia įrodyti, kad n lyginis.

Galimi lygiai du atvejai: n yra arba nelyginis arba lyginis.

Jei n yra nelyginis, tai $n = 2k + 1$ su kuriuo nors k. Tuo atveju

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Taigi, n^2 yra nelyginis kai n yra nelyginis. Bet tai prieštarauja prielaidai, kad n^2 yra lyginis.
Todėl n privalo būti lyginis. Q.E.D.

Kvadratų savybė:

Jei skaičiaus kvadratas lyginis, tai pats skaičius taip pat lyginis.

Įrodymas. Tarkime, kad n^2 lyginis. Reikia įrodyti, kad n lyginis.

Galimi lygiai du atvejai: n yra arba nelyginis arba lyginis.

Jei n yra nelyginis, tai $n = 2k + 1$ su kuriuo nors k. Tuo atveju

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Taigi, n^2 yra nelyginis kai n yra nelyginis. Bet tai prieštarauja prielaidai, kad n^2 yra lyginis.
Todėl n privalo būti lyginis. Q.E.D.

Kvadratų savybė:

Jei skaičiaus kvadratas lyginis, tai pats skaičius taip pat lyginis.

Įrodymas. Tarkime, kad n^2 lyginis. Reikia įrodyti, kad n lyginis.

Galimi lygiai du atvejai: n yra arba nelyginis arba lyginis.

Jei n yra nelyginis, tai $n = 2k + 1$ su kuriuo nors k. Tuo atveju

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Taigi, n^2 yra nelyginis kai n yra nelyginis. Bet tai prieštarauja prielaidai, kad n^2 yra lyginis.
Todėl n privalo būti lyginis. Q.E.D.

Kvadratų savybė:

Jei skaičiaus kvadratas lyginis, tai pats skaičius taip pat lyginis.

Įrodymas. Tarkime, kad n^2 lyginis. Reikia įrodyti, kad n lyginis.

Galimi lygiai du atvejai: n yra arba nelyginis arba lyginis.

Jei n yra nelyginis, tai $n = 2k + 1$ su kuriuo nors k. Tuo atveju

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Taigi, n^2 yra nelyginis kai n yra nelyginis. Bet tai prieštarauja prielaidai, kad n^2 yra lyginis.
Todėl n privalo būti lyginis. Q.E.D.

Kvadratų savybė:

Jei skaičiaus kvadratas lyginis, tai pats skaičius taip pat lyginis.

Įrodymas. Tarkime, kad n^2 lyginis. Reikia įrodyti, kad n lyginis.

Galimi lygiai du atvejai: n yra arba nelyginis arba lyginis.

Jei n yra nelyginis, tai $n = 2k + 1$ su kuriuo nors k. Tuo atveju

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Taigi, n^2 yra nelyginis kai n yra nelyginis. Bet tai prieštarauja prielaidai, kad n^2 yra lyginis.

Todėl n privalo būti lyginis. Q.E.D.

Kvadratų savybė:

Jei skaičiaus kvadratas lyginis, tai pats skaičius taip pat lyginis.

Įrodymas. Tarkime, kad n^2 lyginis. Reikia įrodyti, kad n lyginis.

Galimi lygiai du atvejai: n yra arba nelyginis arba lyginis.

Jei n yra nelyginis, tai $n = 2k + 1$ su kuriuo nors k. Tuo atveju

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Taigi, n^2 yra nelyginis kai n yra nelyginis. Bet tai prieštarauja prielaidai, kad n^2 yra lyginis.
Todėl n privalo būti lyginis. Q.E.D.

Ką reiškia ,,įrodymas prieštaros būdu”?

Norime įrodyti, kad teisingas teiginys A. Tariame, kad teisingas jam priešingas teiginys ne-A. Tada, loginio samprotavimo keliu gauname prieštarą.

Prieštara yra toks teiginys, kuris vienu metu ir teisingas ir klaidingas.

Ką reiškia ,,įrodymas prieštaros būdu”?

Norime įrodyti, kad teisingas teiginys A. Tariame, kad teisingas jam priešingas teiginys ne-A. Tada, loginio samprotavimo keliu gauname prieštarą.

Prieštara yra toks teiginys, kuris vienu metu ir teisingas ir klaidingas.

Ką reiškia ,,įrodymas prieštaros būdu''?

Norime įrodyti, kad teisingas teiginys A. Tariame, kad teisingas jam priešingas teiginys ne-A. Tada, loginio samprotavimo keliu gauname prieštarą.

Prieštara yra toks teiginys, kuris vienu metu ir teisingas ir klaidingas.

Teiginio [Plyšys taške $\sqrt{2}$] įrodymas

Tarkime, kad teisingas teiginys ne-[Plyšys taške $\sqrt{2}$]

Tada egzistuoja tokie natūralieji skaičiai n ir m, kad

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad \text{arba} \quad m^2 = 2n^2.$$

Skaičius m ir n galima parinkti taip, kad

Teiginys [P]:

m ir n nėra abu lyginiai.

yra vienu metu teisingas ir klaidingas.

Teiginio [Plyšys taške $\sqrt{2}$] įrodymas

Tarkime, kad teisingas teiginys ne-[Plyšys taške $\sqrt{2}$]

Tada egzistuoja tokie natūralieji skaičiai n ir m, kad

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad \text{arba} \quad m^2 = 2n^2.$$

Skaičius m ir n galima parinkti taip, kad

Teiginys [P]:

m ir n nėra abu lyginiai.

yra vienu metu teisingas ir klaidingas.

Teiginio [Plyšys taške $\sqrt{2}$] įrodymas

Tarkime, kad teisingas teiginys ne-[Plyšys taške $\sqrt{2}$]

Tada egzistuoja tokie natūralieji skaičiai n ir m, kad

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad \text{arba} \quad m^2 = 2n^2.$$

Skaičius m ir n galima parinkti taip, kad

Teiginys [P]:

m ir n nėra abu lyginiai.

yra vienu metu teisingas ir klaidingas.

Teiginio [Plyšys taške $\sqrt{2}$] įrodymo pabaiga

$$
\begin{aligned}
m^2 = 2n^2 \quad &\Rightarrow \quad m^2 \text{ yra lyginis} \\
\text{remiantis kvadratų savybe} \quad &\Rightarrow \quad \boxed{m \text{ yra lyginis}} \\
&\Rightarrow \quad m = 2k \text{ su kuriuo nors } k \\
&\Rightarrow \quad (2k)^2 = 2n^2 \\
&\Rightarrow \quad n^2 = 2k^2 \\
&\Rightarrow \quad n^2 \text{ yra lyginis} \\
\text{remiantis kvadratų savybe} \quad &\Rightarrow \quad \boxed{n \text{ yra lyginis}}
\end{aligned}
$$

Parodėme, kad teiginys [P] yra ir teisingas ir klaidingas, čia

Teiginys [P]:

m ir n nėra abu lyginiai.

Teiginio [Plyšys taške $\sqrt{2}$] įrodymo pabaiga

$$m^2 = 2n^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 \text{ yra lyginis}$$

remiantis kvadratų savybe $\Rightarrow$ $\boxed{m \text{ yra lyginis}}$

$\Rightarrow$ $m = 2k$ su kuriuo nors k

$\Rightarrow$ $(2k)^2 = 2n^2$

$\Rightarrow$ $n^2 = 2k^2$

$\Rightarrow$ n^2 yra lyginis

remiantis kvadratų savybe $\Rightarrow$ $\boxed{n \text{ yra lyginis}}$

Parodėme, kad teiginys [P] yra ir teisingas ir klaidingas, čia

Teiginys [P]:

m ir n nėra abu lyginiai.

Teiginio [Plyšys taške $\sqrt{2}$] įrodymo pabaiga

$$
\begin{array}{rcl}
m^2 = 2n^2 & \Rightarrow & m^2 \text{ yra lyginis} \\
\text{remiantis kvadratų savybe} & \Rightarrow & \boxed{m \text{ yra lyginis}} \\
& \Rightarrow & m = 2k \text{ su kuriuo nors } k \\
& \Rightarrow & (2k)^2 = 2n^2 \\
& \Rightarrow & n^2 = 2k^2 \\
& \Rightarrow & n^2 \text{ yra lyginis} \\
\text{remiantis kvadratų savybe} & \Rightarrow & \boxed{n \text{ yra lyginis}}
\end{array}
$$

Parodėme, kad teiginys [P] yra ir teisingas ir klaidingas, čia

Teiginys [P]:

m ir n nėra abu lyginiai.

Teiginio [Plyšys taške $\sqrt{2}$] įrodymo pabaiga

$$
\begin{array}{rcl}
m^2 = 2n^2 & \Rightarrow & m^2 \text{ yra lyginis} \\
\text{remiantis kvadratų savybe} & \Rightarrow & \boxed{m \text{ yra lyginis}} \\
& \Rightarrow & m = 2k \text{ su kuriuo nors } k \\
& \Rightarrow & (2k)^2 = 2n^2 \\
& \Rightarrow & n^2 = 2k^2 \\
& \Rightarrow & n^2 \text{ yra lyginis} \\
\text{remiantis kvadratų savybe} & \Rightarrow & \boxed{n \text{ yra lyginis}}
\end{array}
$$

Parodėme, kad teiginys [P] yra ir teisingas ir klaidingas, čia

Teiginys [P]:

m ir n nėra abu lyginiai.

Teiginio [Plyšys taške $\sqrt{2}$] įrodymo pabaiga

$$
\begin{array}{rcl}
m^2 = 2n^2 & \Rightarrow & m^2 \text{ yra lyginis} \\
\text{remiantis kvadratų savybe} & \Rightarrow & \boxed{m \text{ yra lyginis}} \\
& \Rightarrow & m = 2k \text{ su kuriuo nors } k \\
& \Rightarrow & (2k)^2 = 2n^2 \\
& \Rightarrow & n^2 = 2k^2 \\
& \Rightarrow & n^2 \text{ yra lyginis} \\
\text{remiantis kvadratų savybe} & \Rightarrow & \boxed{n \text{ yra lyginis}}
\end{array}
$$

Parodėme, kad teiginys [P] yra ir teisingas ir klaidingas, čia

Teiginys [P]:

m ir n nėra abu lyginiai.

Teiginio [Plyšys taške $\sqrt{2}$] įrodymo pabaiga

$$
\begin{array}{rcl}
m^2 = 2n^2 & \Rightarrow & m^2 \text{ yra lyginis} \\
\text{remiantis kvadratų savybe} & \Rightarrow & \boxed{m \text{ yra lyginis}} \\
& \Rightarrow & m = 2k \text{ su kuriuo nors } k \\
& \Rightarrow & (2k)^2 = 2n^2 \\
& \Rightarrow & n^2 = 2k^2 \\
& \Rightarrow & n^2 \text{ yra lyginis} \\
\text{remiantis kvadratų savybe} & \Rightarrow & \boxed{n \text{ yra lyginis}}
\end{array}
$$

Parodėme, kad teiginys [P] yra ir teisingas ir klaidingas, čia

Teiginys [P]:

m ir n nėra abu lyginiai.

Teiginio [Plyšys taške $\sqrt{2}$] įrodymo pabaiga

$$
\begin{array}{rcl}
m^2 = 2n^2 & \Rightarrow & m^2 \text{ yra lyginis} \\
\text{remiantis kvadratų savybe} & \Rightarrow & \boxed{m \text{ yra lyginis}} \\
& \Rightarrow & m = 2k \text{ su kuriuo nors } k \\
& \Rightarrow & (2k)^2 = 2n^2 \\
& \Rightarrow & n^2 = 2k^2 \\
& \Rightarrow & n^2 \text{ yra lyginis} \\
\text{remiantis kvadratų savybe} & \Rightarrow & \boxed{n \text{ yra lyginis}}
\end{array}
$$

Parodėme, kad teiginys [P] yra ir teisingas ir klaidingas, čia

Teiginys [P]:

m ir n nėra abu lyginiai.

Teiginio [Plyšys taške $\sqrt{2}$] įrodymo pabaiga

$$
\begin{array}{rcl}
m^2 = 2n^2 & \Rightarrow & m^2 \text{ yra lyginis} \\
\text{remiantis kvadratų savybe} & \Rightarrow & \boxed{m \text{ yra lyginis}} \\
& \Rightarrow & m = 2k \text{ su kuriuo nors } k \\
& \Rightarrow & (2k)^2 = 2n^2 \\
& \Rightarrow & n^2 = 2k^2 \\
& \Rightarrow & n^2 \text{ yra lyginis} \\
\text{remiantis kvadratų savybe} & \Rightarrow & \boxed{n \text{ yra lyginis}}
\end{array}
$$

Parodėme, kad teiginys [P] yra ir teisingas ir klaidingas, čia

Teiginys [P]:

m ir n nėra abu lyginiai.

Pačių gražiausių teoremų dešimtukas

1988 metais žurnalo *Mathematical Intelligencer* skaitytojai buvo paprašyti surikiuoti garsiąsias teoremas pagal jų grožį. Rezultatas:

1. Euler'io tapatybė, $e^{i\pi} = -1$.
2.
3.
4.
5.
6.
7. Kvadratinė šaknis iš 2 yra iracionalusis skaičius (teiginys [Plyšys taške $\sqrt{2}$]).
8.
9.
10.

Pačių gražiausių teoremų dešimtukas

1988 metais žurnalo *Mathematical Intelligencer* skaitytojai buvo paprašyti surikiuoti garsiąsias teoremas pagal jų grožį. Rezultatas:

1. Euler'io tapatybė, $e^{i\pi} = -1$.
2.
3.
4.
5.
6.
7. Kvadratinė šaknis iš 2 yra iracionalusis skaičius (teiginys [Plyšys taške $\sqrt{2}$]).
8.
9.
10.

Elėjiečiai

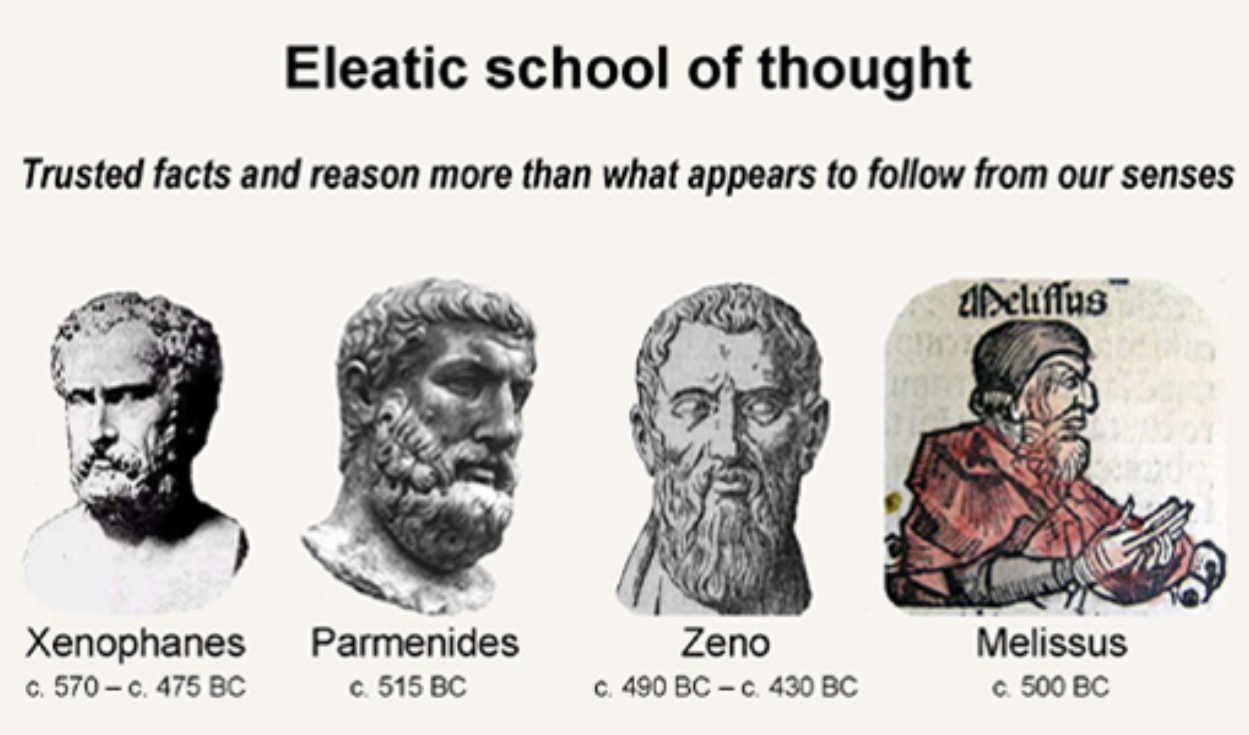


Figure: ©brewminate.com

Būties prigimtis gali būti atskleista tik protu, o ne pojūčiais.

Zenono aporijos

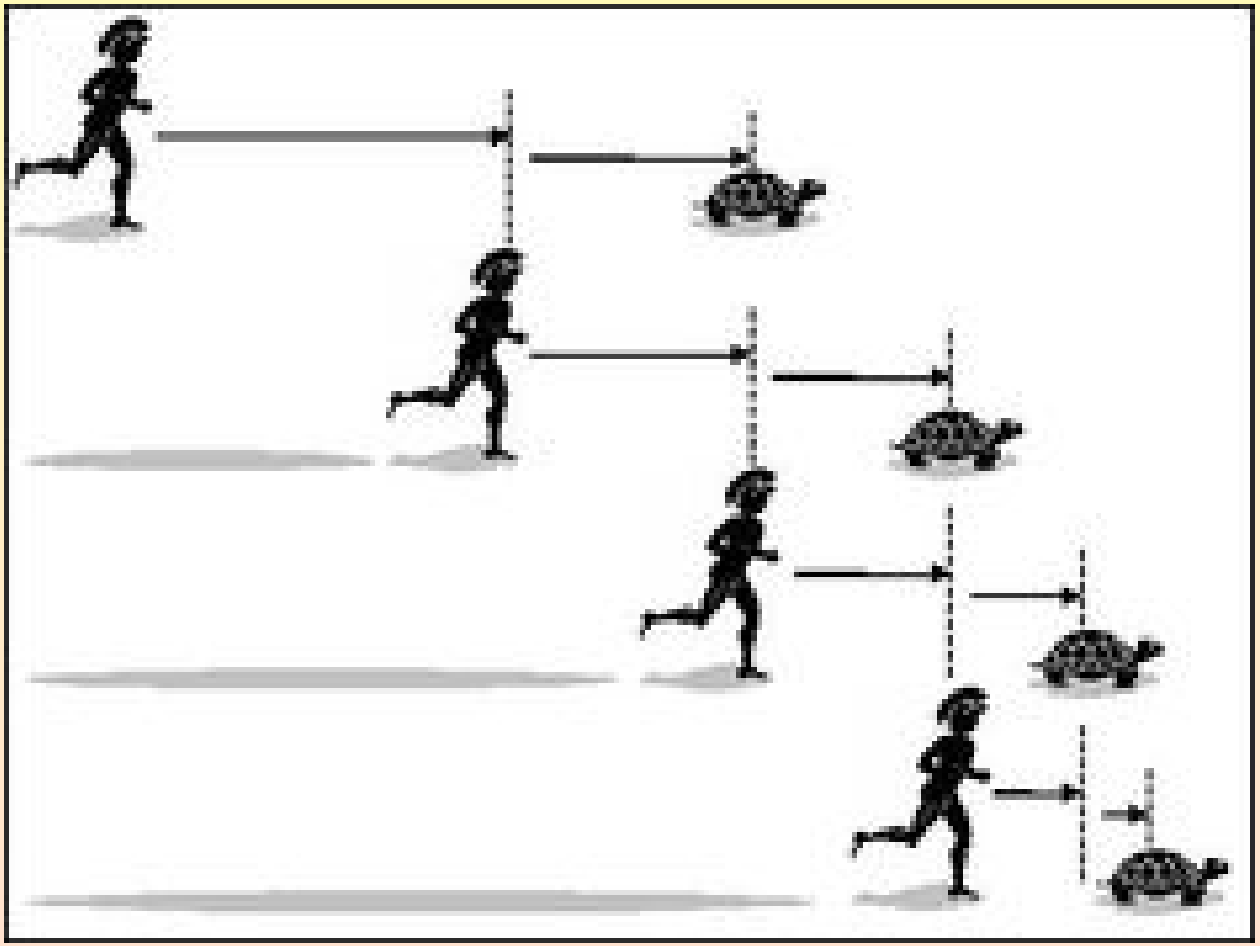
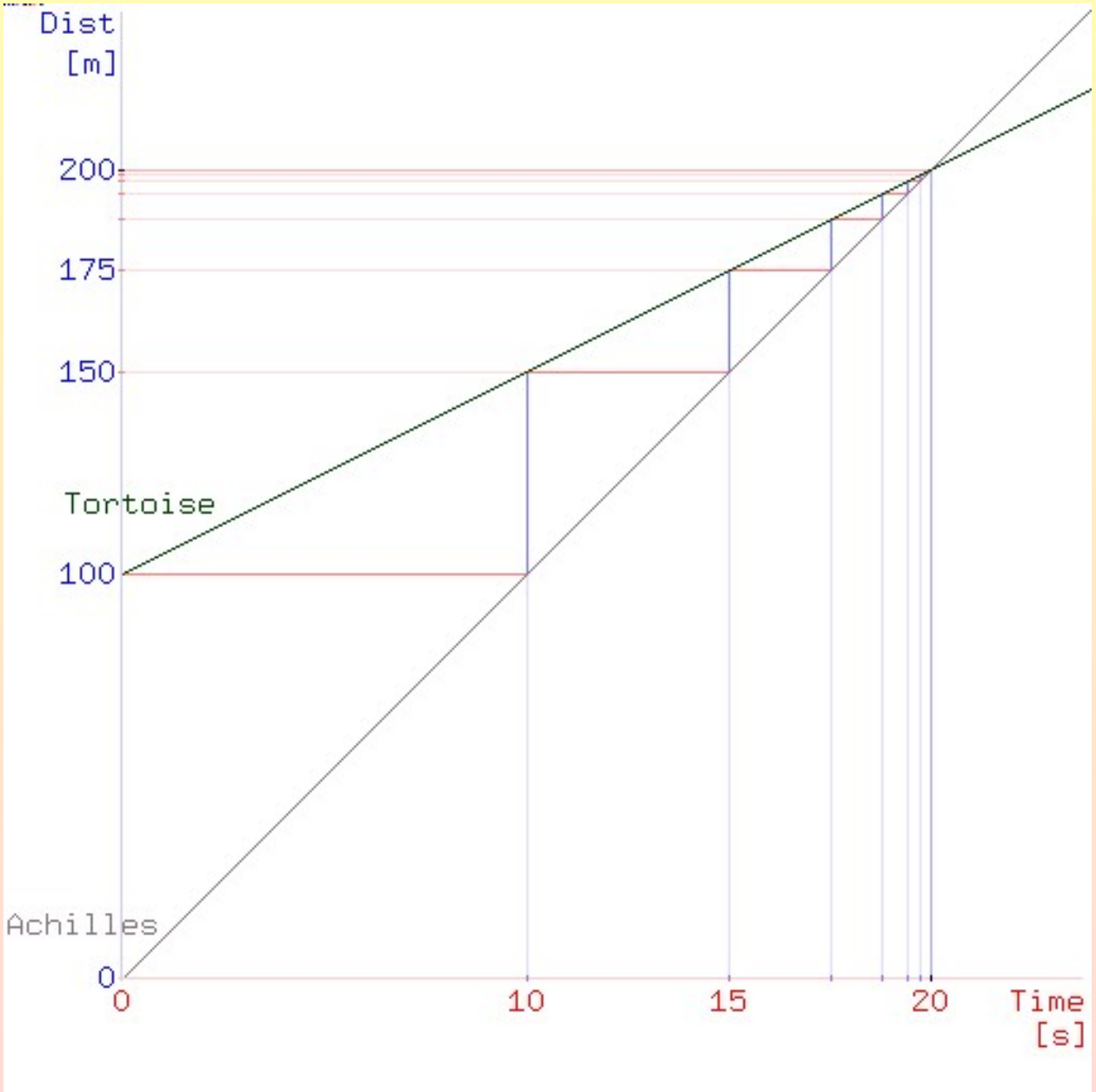


Figure: Achilas ir vėžlys

Ar Achilas pavys vėžlį?

Lenktynių baigtis



1. Theodorus iš Cyrenes įrodė kai kurių kitų skaičių iracionalumą.
2. Šie įvykiai nepaskatino iracionaliųjų skaičių gimimo.
3. Geometrinis nebendramatis netapo aritmetiniu iracionaliu.
4. Bet jie paskatino loginiu samprotavimu pagrįstos matematikos gimimą. Logistiką papildė geometrija ir aritmetika.

1. Theodorus iš Cyrenes įrodė kai kurių kitų skaičių iracionalumą.
2. Šie įvykiai nepaskatino iracionaliųjų skaičių gimimo.
3. Geometrinis nebendramatis netapo aritmetiniu iracionaliu.
4. Bet jie paskatino loginiu samprotavimu pagrįstos matematikos gimimą. Logistiką papildė geometrija ir aritmetika.

1. Theodorus iš Cyrenes įrodė kai kurių kitų skaičių iracionalumą.
2. Šie įvykiai nepaskatino iracionaliųjų skaičių gimimo.
3. Geometrinis nebendramatis netapo aritmetiniu iracionaliu.
4. Bet jie paskatino loginiu samprotavimu pagrįstos matematikos gimimą. Logistiką papildė geometrija ir aritmetika.

1. Theodorus iš Cyrenes įrodė kai kurių kitų skaičių iracionalumą.
2. Šie įvykiai nepaskatino iracionaliųjų skaičių gimimo.
3. Geometrinis nebendramatis netapo aritmetiniu iracionaliu.
4. Bet jie paskatino loginiu samprotavimu pagrįstos matematikos gimimą. Logistiką papildė geometrija ir aritmetika.

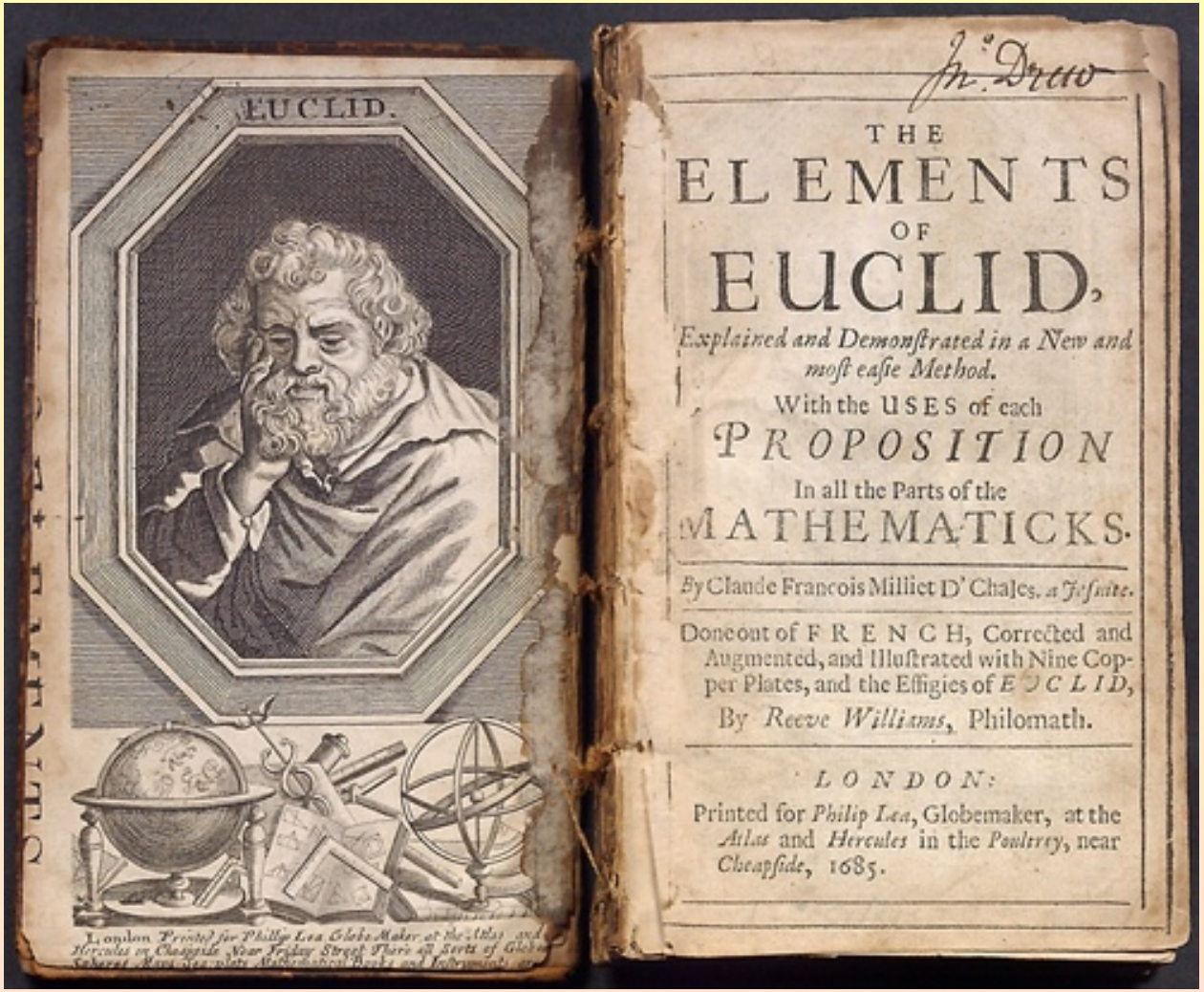
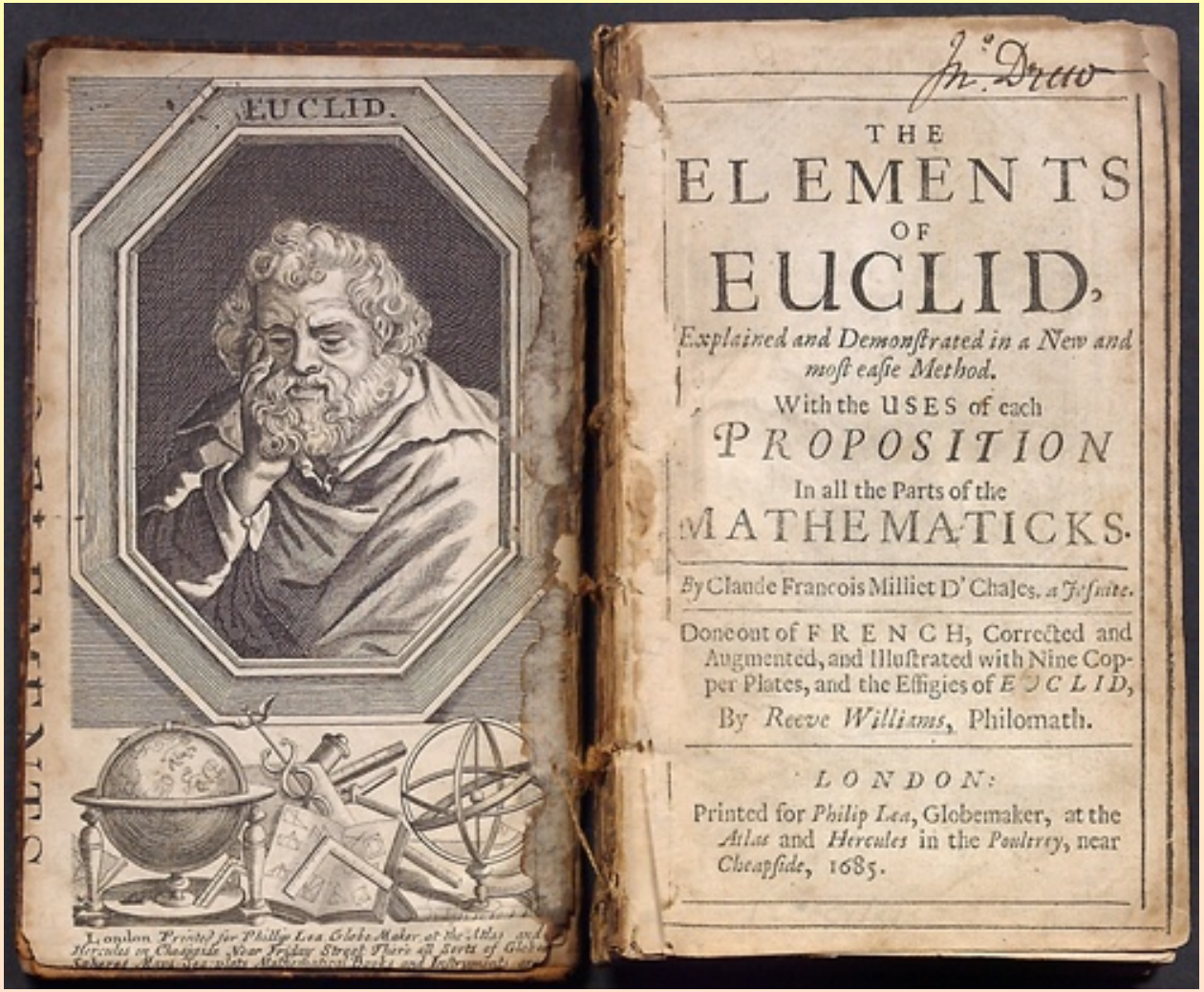


Figure: Euklido Pradmenys



Eudoksas iš Knidos sukūrė proporcijų teoriją, kuri geometriškai pagrindė bendramačius ir nebendramačius dydžius. Aritmetine prasme jie buvo pagrįsti tik 19 mūsų eros amžiuje.

Dešimtainė skaičiavimo sistema

Šiuolaikinė dešimtainė skaičių rašymo sistema atsirado apie 500 mūsų eros metus Indijoje. Į Europą pateko iš Arabijos 10-o amžiaus gale. Tad vadinama indų-arabų skaičiavimo sistema.

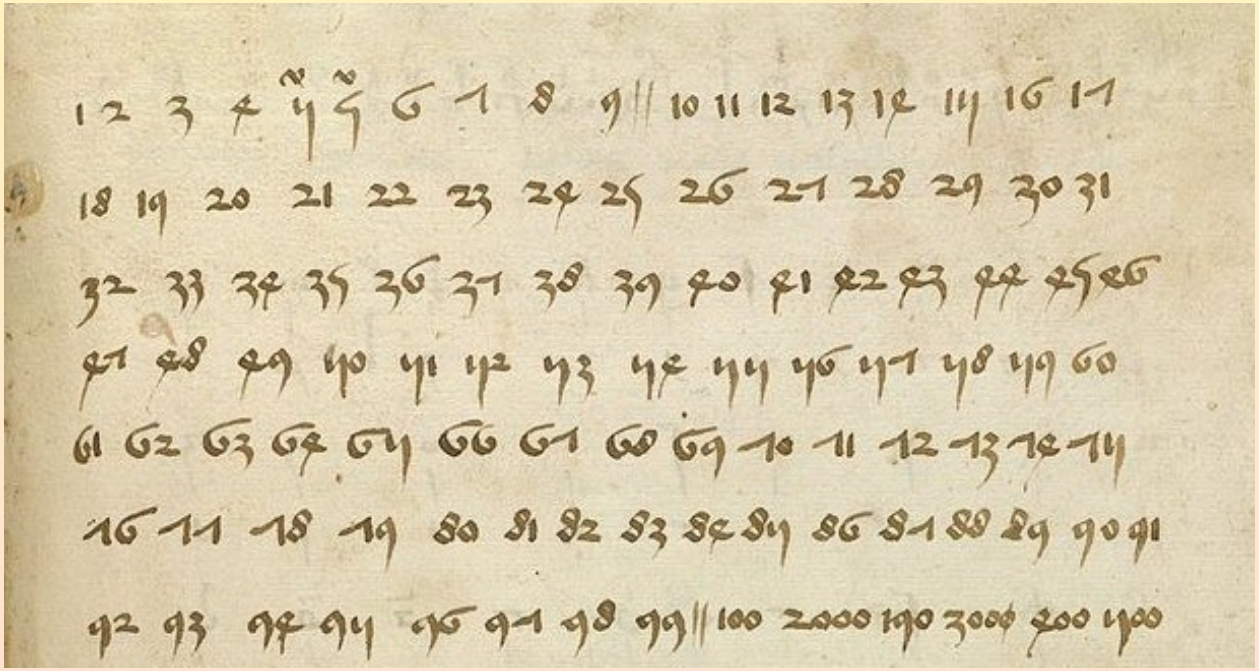


Figure: Indų-Arabų skaičiavimo sistema

Romėnų skaičiavimo sistema

Anksčiau viduramžių Europoje buvo naudojama romėnų skaičiavimo sistema.

Figure: Romėnų skaičiavimo sistema

Naujoji sistema buvo perimama labai lėtai, problemiškai ir banguotai. Skirtumas tas, kad romėnų skaitmenys, būdami skirtingose vietose, nekeičia prasmės.

Matematikos istorikas John Crossley ištyrė 1398 rankraščius parašytus tarp 1200 ir 1500 metų norėdamas nustatyti kokias skaičiavimo sistemas jos naudoja.

Dešimtainė skaičiavimo sistema

1. 13 amžiuje naudota 7% rankraščių,
2. 14 amžiuje naudota 17% rankraščių,
3. 15 amžiuje naudota 47% rankraščių.

Daugelyje rankraščių naudojami skaitmenys priklausė skirtingoms sistemoms.

Matematikos istorikas John Crossley ištyrė 1398 rankraščius parašytus tarp 1200 ir 1500 metų norėdamas nustatyti kokias skaičiavimo sistemas jos naudoja.

Dešimtainė skaičiavimo sistema

1. 13 amžiuje naudota 7% rankraščių,
2. 14 amžiuje naudota 17% rankraščių,
3. 15 amžiuje naudota 47% rankraščių.

Daugelyje rankraščių naudojami skaitmenys priklausė skirtingoms sistemoms.

Matematikos istorikas John Crossley ištyrė 1398 rankraščius parašytus tarp 1200 ir 1500 metų norėdamas nustatyti kokias skaičiavimo sistemas jos naudoja.

Dešimtainė skaičiavimo sistema

1. 13 amžiuje naudota 7% rankraščių,
2. 14 amžiuje naudota 17% rankraščių,
3. 15 amžiuje naudota 47% rankraščių.

Daugelyje rankraščių naudojami skaitmenys priklausė skirtingoms sistemoms.

Matematikos istorikas John Crossley ištyrė 1398 rankraščius parašytus tarp 1200 ir 1500 metų norėdamas nustatyti kokias skaičiavimo sistemas jos naudoja.

Dešimtainė skaičiavimo sistema

1. 13 amžiuje naudota 7% rankraščių,
2. 14 amžiuje naudota 17% rankraščių,
3. 15 amžiuje naudota 47% rankraščių.

Daugelyje rankraščių naudojami skaitmenys priklausė skirtingoms sistemoms.

Matematikos istorikas John Crossley ištyrė 1398 rankraščius parašytus tarp 1200 ir 1500 metų norėdamas nustatyti kokias skaičiavimo sistemas jos naudoja.

Dešimtainė skaičiavimo sistema

1. 13 amžiuje naudota 7% rankraščių,
2. 14 amžiuje naudota 17% rankraščių,
3. 15 amžiuje naudota 47% rankraščių.

Daugelyje rankraščių naudojami skaitmenys priklausė skirtingoms sistemoms.

Skaičius $e \approx 2.718281828...$

1683 metais Jacob Bernoulli skaičiuodamas sudėtinius procentus pastebėjo dėsningumą, kuris matematine kalba išreiškiamas taip: egzistuoja riba

$$e = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Apibrėžtis. Skaičius a yra sekos $(a_m) = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots)$ riba, rašoma $a = \lim_{m \to \infty} a_m$, jei kiekvienam racionaliajam $\epsilon > 0$ egzistuoja natūralusis N toks, kad teisinga

$$\text{jei } m \geq N, \text{ tai } |a_m - a| < \epsilon.$$

Skaičius $e \approx 2.718281828...$

1683 metais Jacob Bernoulli skaičiuodamas sudėtinius procentus pastebėjo dėsningumą, kuris matematine kalba išreiškiamas taip: egzistuoja riba

$$e = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Apibrėžtis. Skaičius a yra sekos $(a_m) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, \dots)$ riba, rašoma $a = \lim_{m\to\infty} a_m$, jei kiekvienam racionaliajam $\epsilon > 0$ egzistuoja natūralusis N toks, kad teisinga

$$\text{jei } m \geq N, \text{ tai } |a_m - a| < \epsilon.$$

Skaičius $e \approx 2.718281828...$

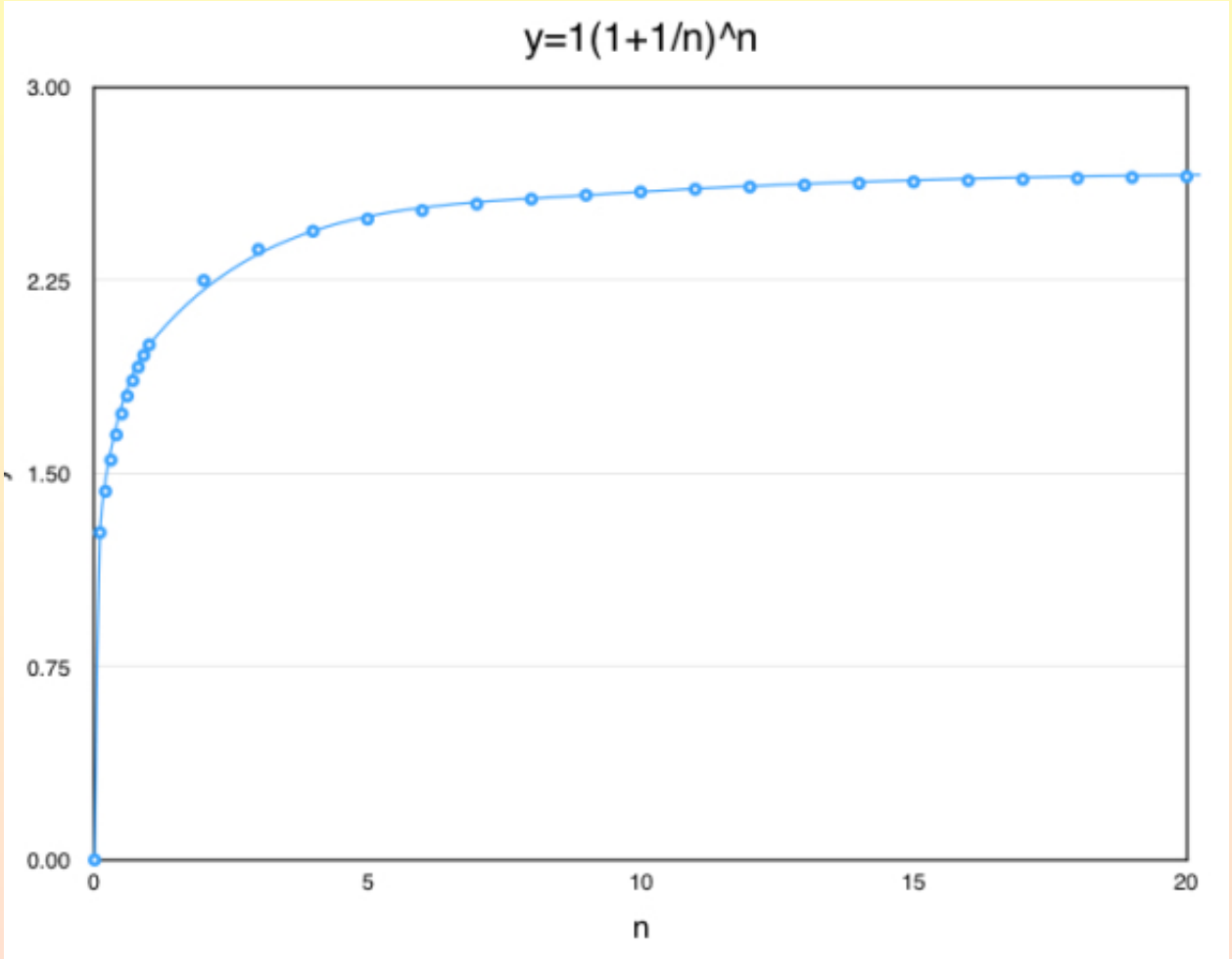


Figure: Eulerio skaičius

Skaičius $e \approx 2.718281828...$

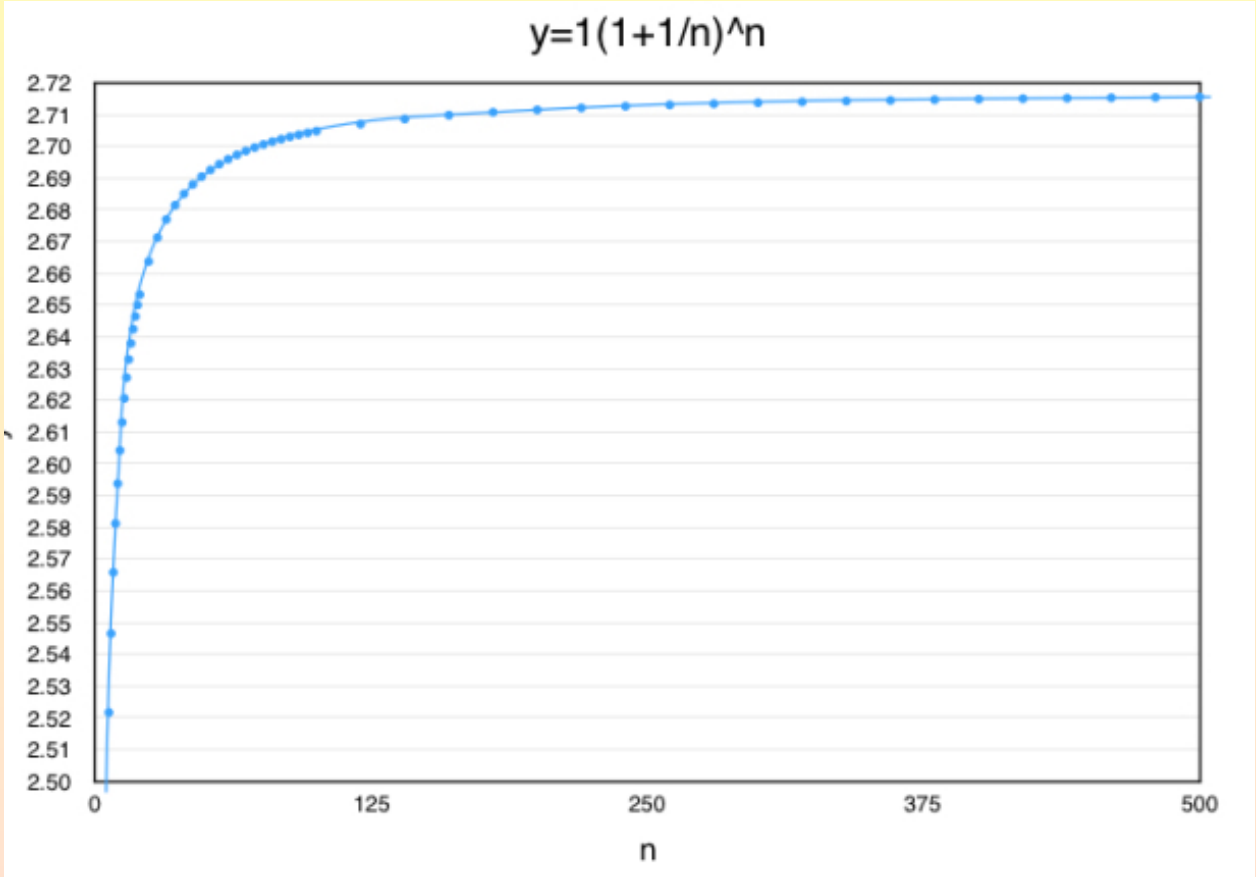


Figure: Eulerio skaičius

Skaičius $e \approx 2.718281828...$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}}}}$$

Šiuo būdu 1737 metais Leonhard'as Euler'is įrodė, kad e yra iracionalusis skaičius.

Grandininė trupmena

Begalinė grandininė trupmena yra riba

$$n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cdots}} := \lim_{m\to\infty} [n_0, n_1, \ldots, n_m]$$

$$=: [n_0, n_1, n_2, \ldots],$$

čia

$$[n_0, n_1, \ldots, n_m] := n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{n_m}}}.$$

Kiti iracionalieji skaičiai:

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ...]$$

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...]$$

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, ...]$$

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, ...]$$

Skaičiaus π iracionalumą 1761 metais įrodė Johann'as Heinrich'as Lambert'as kitu būdu. Grandininę trupmeną apibendrino funkcijoms ir įrodė:

jei $x \neq 0$ yra racionalus, tai $\tan x$ yra iracionalus.

Kadangi $\tan(\pi/4) = 1$ yra racionalus, tai π privalo būti iracionalus. Čia naudojama loginė kontrapozicija: teiginiams A ir B

$A \Rightarrow B$ tada ir tik tada, kai ne-B $\Rightarrow$ne-A.

Realieji skaičiai

Prisiminkime, kad $\sqrt{2}$ galima būtų tapatinti su begaline dešimtaine trupmena $1,414...$, jei sugebėtume jai suteikti ne tik simbolinę prasmę.

Naudojant dešimtainę skaičių reiškimo sistemą, begalinę dešimtainę trupmeną

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

galėtume bandyti suprasti kaip begalinę sumą

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

jei jai sugebėtume suteikti ne tik simbolinę prasmę.

Realieji skaičiai

Prisiminkime, kad $\sqrt{2}$ galima būtų tapatinti su begaline dešimtaine trupmena $1,414...$, jei sugebėtume jai suteikti ne tik simbolinę prasmę.

Naudojant dešimtainę skaičių reiškimo sistemą, begalinę dešimtainę trupmeną

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

galėtume bandyti suprasti kaip begalinę sumą

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

jei jai sugebėtume suteikti ne tik simbolinę prasmę.

Realiųjų skaičių aibė

Su kiekvienu natūraliuoju n, pažymėkime

$$\begin{aligned} s_n &:= a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \cdots + \frac{a_n}{10^n} \\ &= a_0, a_1 a_2 \dots a_n. \end{aligned}$$

Kai $n < m$, tai

$$s_n - s_m = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{a_m}{10^m}.$$

Gauname seką $s = (s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$, kurios nariai

$$s_n - s_m \approx 0, \quad \text{kai } n \text{ ir } m \text{ dideli.}$$

Tiksliau, sakysime, kad seka s yra *Cauchy seka*, jei su kiekvienu racionaliuoju $\epsilon > 0$ egzistuoja toks natūralusis N, kad teisingas teiginys

$$\text{jei } n \geq N \text{ ir } m \geq N, \text{ tai } |s_n - s_m| < \epsilon.$$

Realiųjų skaičių aibė

Su kiekvienu natūraliuoju n, pažymėkime

$$\begin{aligned} s_n &:= a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \cdots + \frac{a_n}{10^n} \\ &= a_0, a_1 a_2 \ldots a_n. \end{aligned}$$

Kai $n < m$, tai

$$s_n - s_m = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{a_m}{10^m}.$$

Gauname seką $s = (s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots)$, kurios nariai

$$s_n - s_m \approx 0, \quad \text{kai } n \text{ ir } m \text{ dideli.}$$

Tiksliau, sakysime, kad seka s yra *Cauchy seka*, jei su kiekvienu racionaliuoju $\epsilon > 0$ egzistuoja toks natūralusis N, kad teisingas teiginys

$$\text{jei } n \geq N \text{ ir } m \geq N, \text{ tai } |s_n - s_m| < \epsilon.$$

Realiųjų skaičių aibė

Su kiekvienu natūraliuoju n, pažymėkime

$$\begin{aligned} s_n &:= a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \cdots + \frac{a_n}{10^n} \\ &= a_0, a_1 a_2 \ldots a_n. \end{aligned}$$

Kai $n < m$, tai

$$s_n - s_m = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{a_m}{10^m}.$$

Gauname seką $s = (s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots)$, kurios nariai

$$s_n - s_m \approx 0, \quad \text{kai } n \text{ ir } m \text{ dideli.}$$

Tiksliau, sakysime, kad seka s yra *Cauchy seka*, jei su kiekvienu racionaliuoju $\epsilon > 0$ egzistuoja toks natūralusis N, kad teisingas teiginys

$$\text{jei } n \geq N \text{ ir } m \geq N, \text{ tai } |s_n - s_m| < \epsilon.$$

Realiųjų skaičių aibė

Su Cauchy sekomis $s = (s_n)$ ir $r = (r_n)$ galima apibrėžti aritmetinius veiksmus panariui:

$$s + r = (s_n + r_n) \quad \text{ir} \quad s \times r = (s_n r_n)$$

$$-s = (-s_n) \quad \text{ir} \quad \frac{1}{s} = \left(\frac{1}{s_n}\right).$$

Taip pat galime apibrėžti nelygybę sakant, kad $s < r$, jei egzistuoja racionalusis $\epsilon > 0$ ir natūralusis N tokie, kad

$$\text{jei } n \geq N, \text{ tai } s_n + \epsilon < r_n.$$

Galiausiai, sakysime, kad Cauchy sekos $s = (s_n)$ ir $r = (r_n)$ yra *ekvivalenčios*, jei kiekvienam racionaliajam $\epsilon > 0$ egzistuoja natūralusis N toks, kad teisinga

$$\text{jei } n \geq N, \text{ tai } |s_n - r_n| < \epsilon.$$

Aibė, kurią sudaro tarpusavyje tapatinamos ekvivalenčios Cauchy sekos, yra **realiųjų skaičių aibė.**

Realiųjų skaičių aibė

Su Cauchy sekomis $s = (s_n)$ ir $r = (r_n)$ galima apibrėžti aritmetinius veiksmus panariui:

$$s + r = (s_n + r_n) \quad \text{ir} \quad s \times r = (s_n r_n)$$

$$-s = (-s_n) \quad \text{ir} \quad \frac{1}{s} = \left(\frac{1}{s_n}\right).$$

Taip pat galime apibrėžti nelygybę sakant, kad $s < r$, jei egzistuoja racionalusis $\epsilon > 0$ ir natūralusis N tokie, kad

$$\text{jei } n \geq N, \text{ tai } s_n + \epsilon < r_n.$$

Galiausiai, sakysime, kad Cauchy sekos $s = (s_n)$ ir $r = (r_n)$ yra *ekvivalenčios*, jei kiekvienam racionaliajam $\epsilon > 0$ egzistuoja natūralusis N toks, kad teisinga

$$\text{jei } n \geq N, \text{ tai } |s_n - r_n| < \epsilon.$$

Aibė, kurią sudaro tarpusavyje tapatinamos ekvivalenčios Cauchy sekos, yra **realiųjų skaičių aibė.**

Realiųjų skaičių aibė

Su Cauchy sekomis $s = (s_n)$ ir $r = (r_n)$ galima apibrėžti aritmetinius veiksmus panariui:

$$s + r = (s_n + r_n) \quad \text{ir} \quad s \times r = (s_n r_n)$$

$$-s = (-s_n) \quad \text{ir} \quad \frac{1}{s} = \left(\frac{1}{s_n}\right).$$

Taip pat galime apibrėžti nelygybę sakant, kad $s < r$, jei egzistuoja racionalusis $\epsilon > 0$ ir natūralusis N tokie, kad

$$\text{jei } n \geq N, \text{ tai } s_n + \epsilon < r_n.$$

Galiausiai, sakysime, kad Cauchy sekos $s = (s_n)$ ir $r = (r_n)$ yra *ekvivalenčios*, jei kiekvienam racionaliajam $\epsilon > 0$ egzistuoja natūralusis N toks, kad teisinga

$$\text{jei } n \geq N, \text{ tai } |s_n - r_n| < \epsilon.$$

Aibė, kurią sudaro tarpusavyje tapatinamos ekvivalenčios Cauchy sekos, yra **realiųjų skaičių aibė.**

Realiųjų skaičių aibė

Su Cauchy sekomis $s = (s_n)$ ir $r = (r_n)$ galima apibrėžti aritmetinius veiksmus panariui:

$$s + r = (s_n + r_n) \quad \text{ir} \quad s \times r = (s_n r_n)$$

$$-s = (-s_n) \quad \text{ir} \quad \frac{1}{s} = \left(\frac{1}{s_n}\right).$$

Taip pat galime apibrėžti nelygybę sakant, kad $s < r$, jei egzistuoja racionalusis $\epsilon > 0$ ir natūralusis N tokie, kad

$$\text{jei } n \geq N, \text{ tai } s_n + \epsilon < r_n.$$

Galiausiai, sakysime, kad Cauchy sekos $s = (s_n)$ ir $r = (r_n)$ yra *ekvivalenčios*, jei kiekvienam racionaliajam $\epsilon > 0$ egzistuoja natūralusis N toks, kad teisinga

$$\text{jei } n \geq N, \text{ tai } |s_n - r_n| < \epsilon.$$

Aibė, kurią sudaro tarpusavyje tapatinamos ekvivalenčios Cauchy sekos, yra **realiųjų skaičių aibė.**

Koks šios skaičių aibės konstrukcijos rezultatas?

Cantor'o-Dedekind'o aksioma:

Tarp geometrinės tiesės taškų ir realiųjų skaičių aibės yra abipus vienareikšmė atitiktis.

Koks šios skaičių aibės konstrukcijos rezultatas?

Cantor'o-Dedekind'o aksioma:

Tarp geometrinės tiesės taškų ir realiųjų skaičių aibės yra abipus vienareikšmė atitiktis.

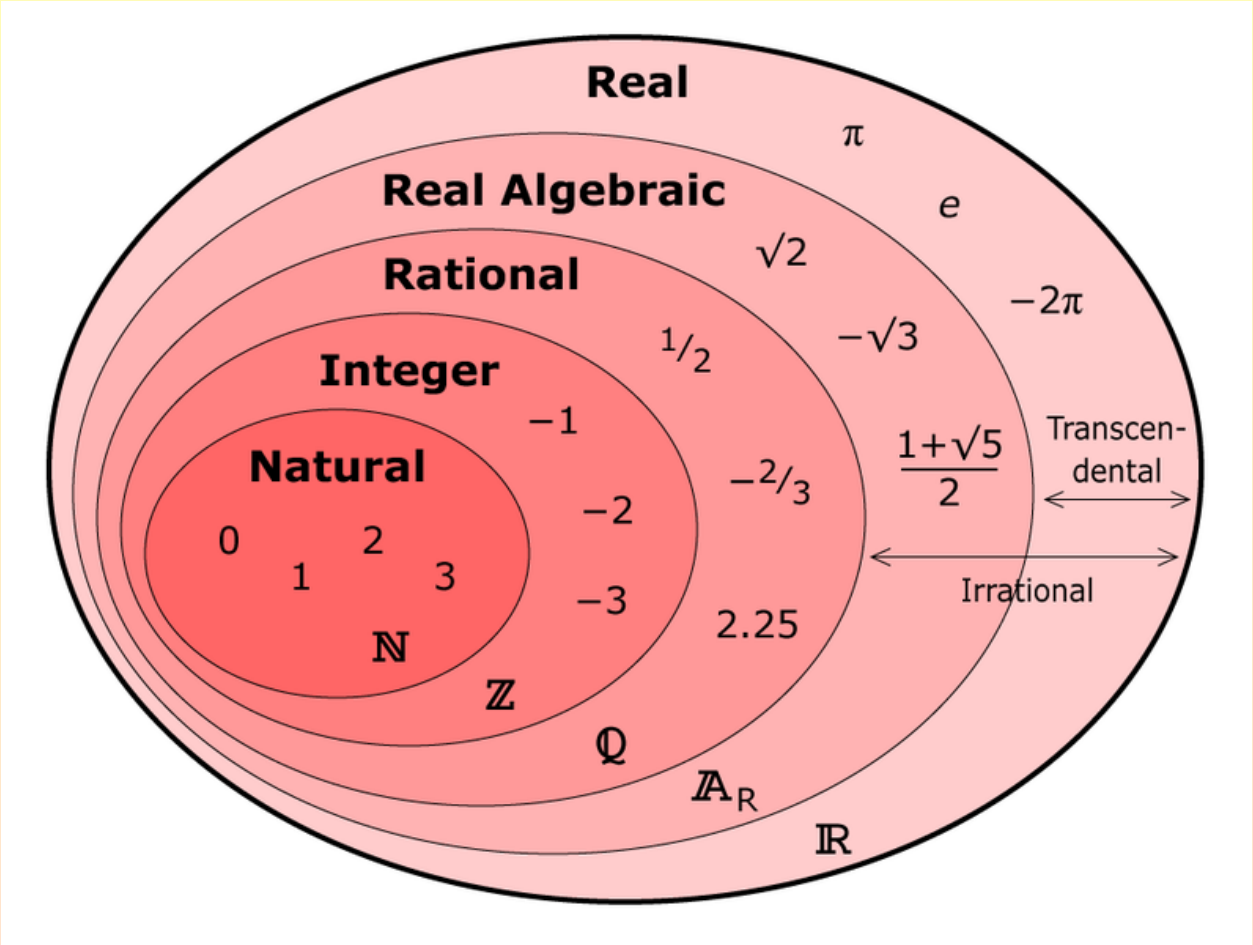


Figure: Pagrindinės realiųjų skaičių rūšys

Realiųjų skaičių rūšys

1. Algebrinis skaičius yra daugianario su sveikaisiais koeficientais šaknis. Pavyzdžiui, $\sqrt{2}$ yra daugianario $x^2 - 2 = 0$ šaknis.
2. Transcendentinis skaičius yra realusis skaičius, kuris nėra algebrinis.

1873 metais Charles Hermite įrodė, kad skaičius e yra transcendentinis.
1882 metais Ferdinand Lindemann įrodė, kad skaičius π yra transcendentinis.

Realiųjų skaičių rūšys

1. Algebrinis skaičius yra daugianario su sveikaisiais koeficientais šaknis. Pavyzdžiui, $\sqrt{2}$ yra daugianario $x^2 - 2 = 0$ šaknis.
2. Transcendentinis skaičius yra realusis skaičius, kuris nėra algebrinis.

1873 metais Charles Hermite įrodė, kad skaičius e yra transcendentinis.
1882 metais Ferdinand Lindemann įrodė, kad skaičius π yra transcendentinis.

Teorema. Tarp transcendentinių skaičių aibės ir realiųjų skaičių aibės egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis.

Įrodymas. Žymėkime realiųjų skaičių aibę $\mathbb{R}$ ir algebrinių skaičių aibę A. Tada $\mathbb{R} \setminus A$ yra transcendentinių skaičių aibė. Kiekvienam $x \in [0, \infty)$ tegul

$$f(x) := \begin{cases} \pi + x, & \text{jei } \pi + x \notin A, \\ \pi - x, & \text{jei } \pi + x \in A. \end{cases}$$

Pakanka parodyti du dalykus: pirma, šios reikšmė apibrėžia funkciją f iš $[0, \infty)$ į $\mathbb{R} \setminus A$, ir antra, f yra injekcija.

Dėl pirmo, jei $\pi + x \in A$ ir $\pi - x \in A$, tai

$$\pi = \frac{1}{2}[(\pi + x) + (\pi - x)] \in A.$$

Tai yra prieštara tam, kad $\pi \in \mathbb{R} \setminus A$. Todėl $\pi - x \in \mathbb{R} \setminus A$ kai $\pi + x \in A$.

Dėl antro, jei $f(x) = f(y)$, tai $x = |f(x) - \pi| = |f(y) - \pi| = y$. Todėl f yra injekcija. Q.E.D.

Išvados

1. Matematika nėra realaus pasaulio paveikslas.
2. Matematiką sudaro galimų pasaulių eskizai.
3. Istorija liūdija, kad, anksčiau ar vėliau, matematinius eskizus gamtos mokslas naudoja pavaizduoti realųjį pasaulį.

Išvados

1. Matematika nėra realaus pasaulio paveikslas.
2. Matematiką sudaro galimų pasaulių eskizai.
3. Istorija liūdija, kad, anksčiau ar vėliau, matematinius eskizus gamtos mokslas naudoja pavaizduoti realųjį pasaulį.

Išvados

1. Matematika nėra realaus pasaulio paveikslas.
2. Matematiką sudaro galimų pasaulių eskizai.
3. Istorija liūdija, kad, anksčiau ar vėliau, matematinius eskizus gamtos mokslas naudoja pavaizduoti realųjį pasaulį.